

# IDENTIFICATION LA DERIVEE FRACTIONNAIRE DANS LE COMPORTEMENT VIBRATOIRE DES MATERIAUX ET STRUCTURES

**Yvon CHEVALIER, Tibi BEDA**

Groupe Vibroacoustique du LISMMA

Institut Supérieur de Mécanique de Paris (ISMEP-SUPMECA)

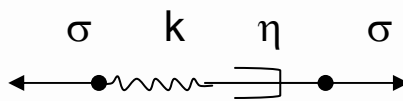
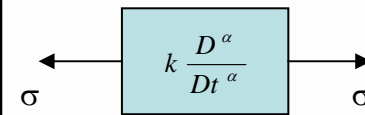
3, rue Fernand Hainaut-93407 SAINT-OUEN (France)

Courriel: [yvon.chevalier@supmecca.fr](mailto:yvon.chevalier@supmecca.fr)

Courriel: [tibi.beda@supméca.fr](mailto:tibi.beda@supméca.fr), [tbeda@yahoo.com](mailto:tbeda@yahoo.com)

**Journée Européenne sur la Dérivée Fractionnaire en Mécanique,  
Etat-de-l'Art et Application,  
novembre 2006, CNAM, Paris.**

# Loi de comportement de Matériaux Sollicitation unidimensionnelle

	Opérateurs différentiels	Modèles rhéologiques
Dérivées d'ordre entier	$\sigma(t) + \sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k \sigma(t)}{dt^k} = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^N b_k \frac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k}$ <p>M+N+2 paramètres</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Maxwell en série ou en parallèle</li> <li>- 2 paramètres par cellule: k et η</li> </ul> 
Dérivées fractionnaires	$\sigma(t) + \sum_{k=1}^{M'} a_k D^{\alpha_k} (\sigma(t)) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{N'} b_k D^{\alpha_k} (\varepsilon(t))$ <p>M'+N'+2 paramètres</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Cellules en série ou en parallèle</li> <li>- 2 paramètres par cellule: k et α avec, <ul style="list-style-type: none"> <li>α=0: ressort;</li> <li>α=1: amortisseur</li> </ul> </li> </ul> 

# Différentes Modélisations

## Comportement en régime fréquentiel

$$\tilde{\sigma}(\omega) = E^*(\omega) \tilde{\varepsilon}(\omega) \quad ; \quad \omega = 2\pi f : \text{ pulsation}$$

$$E^*(\omega) = E_0 \frac{\prod_{k=1}^N \left(1 + (j\omega / \omega_{0k})^{\alpha_k}\right)}{\prod_{k=1}^N \left(1 + (j\omega / \omega_{1k})^{\alpha_k}\right)}$$

$\omega_{0k}$  et  $\omega_{1k}$ ,  $k=1, \dots, N$ : pulsations de coupures

### Simulation d'un modèle de Rogers à 2 termes (4 fréquences de coupure)

- *Technique de Bode:*  $\alpha = 1$ , *10 fréquences de coupure*
- *Technique de Rogers:*  $\alpha = 0.5$ , *6 fréquences de coupure*
- *[6.23 dB, 7.19 dB]:*  $\alpha$  quelconque, *2 fréquences de coupure*

# Diagramme [6.23 dB, 7.19 dB] et Techniques dérivées

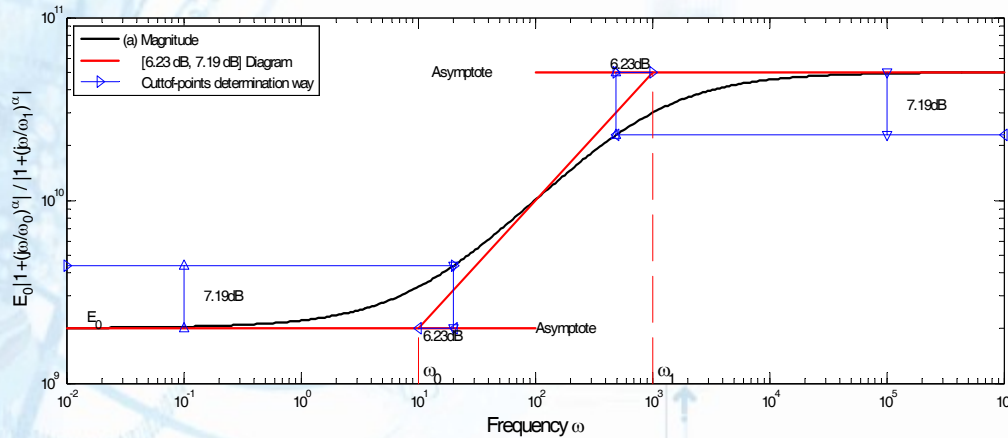


Diagramme  
[6.23 dB, 7.19 dB]

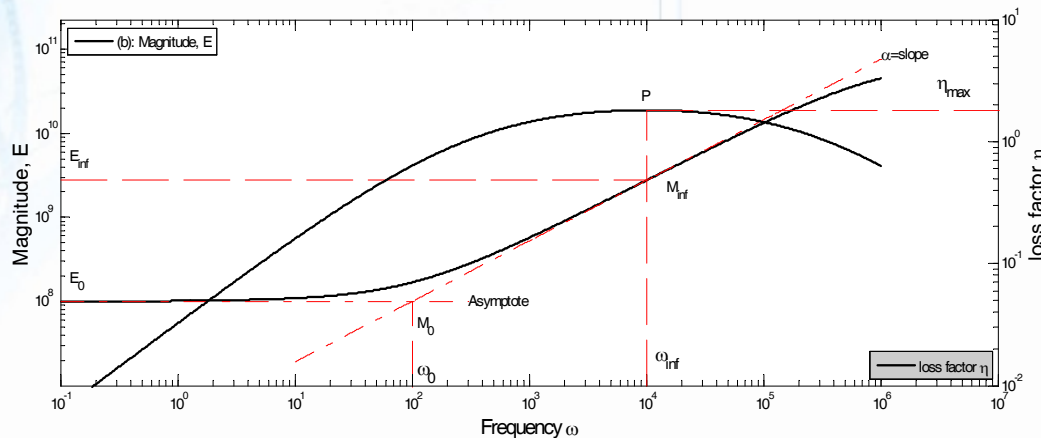
Techniques  
dérivées

Domaine de fréquences  
restreint couvert par  
l'expérimentation

$$\eta(\omega) \approx \frac{2}{\pi} \text{Arg} \eta_{\max}$$

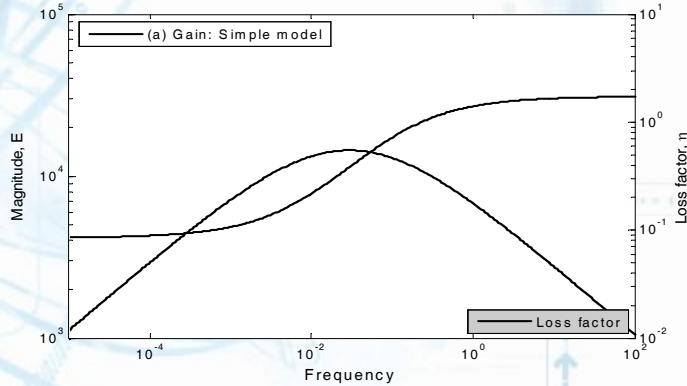
$$\omega_0 = \omega_{\text{inf}} \sqrt{\frac{E_0}{E_{\text{inf}}}}$$

$$\omega_1 = \omega_{\text{inf}} \sqrt{\frac{E_{\text{inf}}}{E_0}}$$

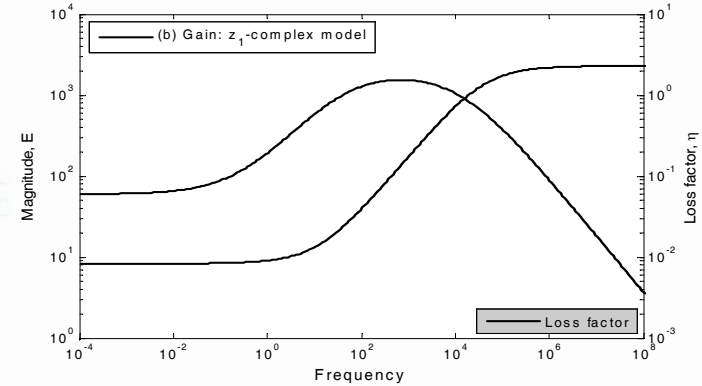


# Matériaux viscoélastiques complexes

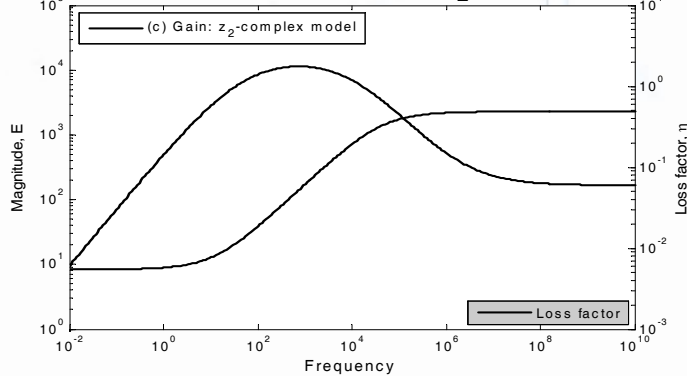
Matériau simple



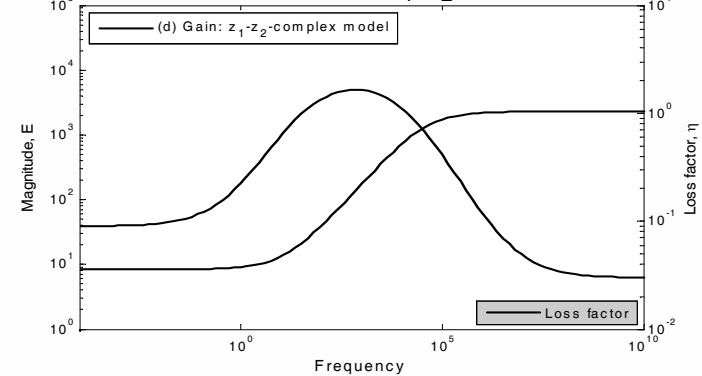
Matériau semi-complexe:  $z_1$ -complexe



Matériau semi-complexe:  $z_2$ -complexe



Matériau complexe:  $z_1$ - $z_2$ -complexe



# Matériaux Viscoélastiques Complexes Interprétation

$$\frac{D^{\alpha_2} \sigma}{Dt^{\alpha_2}} + k_2 \frac{D^{\beta_2} \sigma}{Dt^{\beta_2}} = E_0 \left[ \frac{D^{\alpha_1} \varepsilon}{Dt^{\alpha_1}} + k_1 \frac{D^{\beta_1} \varepsilon}{Dt^{\beta_1}} \right] \Leftrightarrow E^*(\omega) = E_0 \frac{(j\omega)^{\alpha_1} + k_1 (j\omega)^{\beta_1}}{(j\omega)^{\alpha_2} + k_2 (j\omega)^{\beta_2}}$$

Au voisinage de 0 ( $\omega \rightarrow 0$ )

$$E'(\omega) \cong E_0 \omega^{\Delta\alpha} \cos \frac{\pi\Delta\alpha}{2}$$

$$\text{tg} \delta_E \cong \text{tg} \delta\Delta_\alpha$$

$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 > 0$  et faible

$$\beta_1 > \alpha_1$$

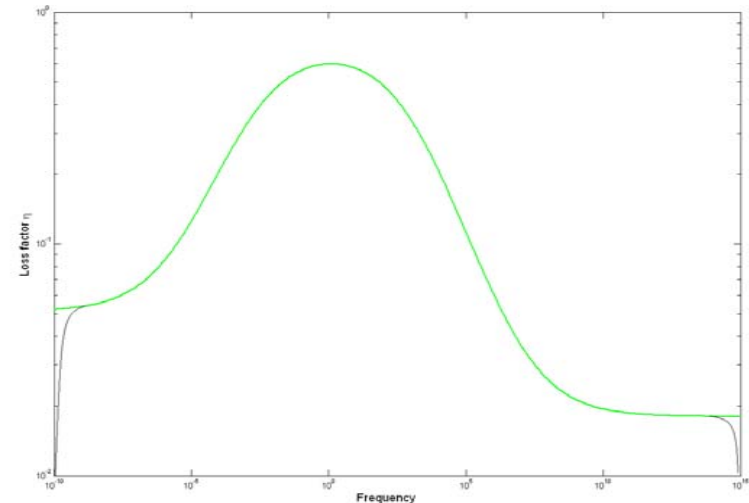
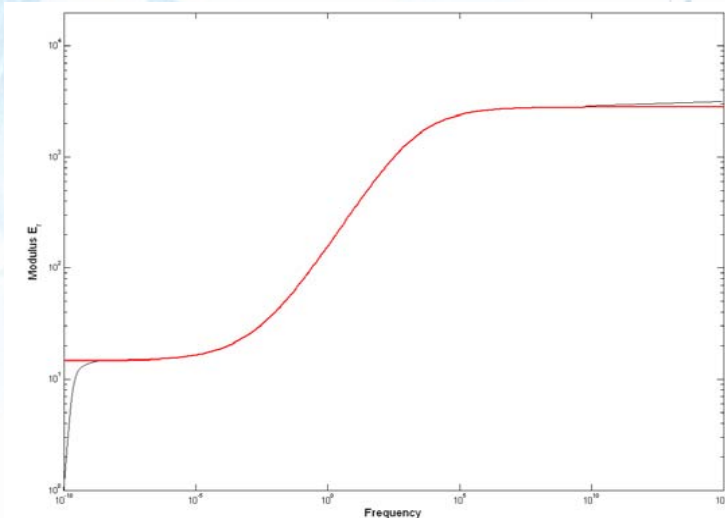
$$\beta_2 > \alpha_2$$

Au voisinage de  $\infty$  ( $\omega \rightarrow \infty$ )

$$E'(\omega) \cong E_0 \frac{k_1}{k_2} \omega^{\Delta\beta} \cos \frac{\pi\Delta\beta}{2}$$

$$\text{tg} \delta_E \cong \text{tg} \delta\Delta_\beta$$

$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2 > 0$  et faible



# IDENTIFICATION DES PARAMETRES FRACTIONNAIRES

**Yvon CHEVALIER, Tibi BEDA**

Groupe Vibroacoustique du LISMMA

Institut Supérieur de Mécanique de Paris (ISMEP-SUPMECA)

3, rue Fernand Hainaut-93407 SAINT-OUEN (France)

Courriel: [yvon.chevalier@supmeca.fr](mailto:yvon.chevalier@supmeca.fr)

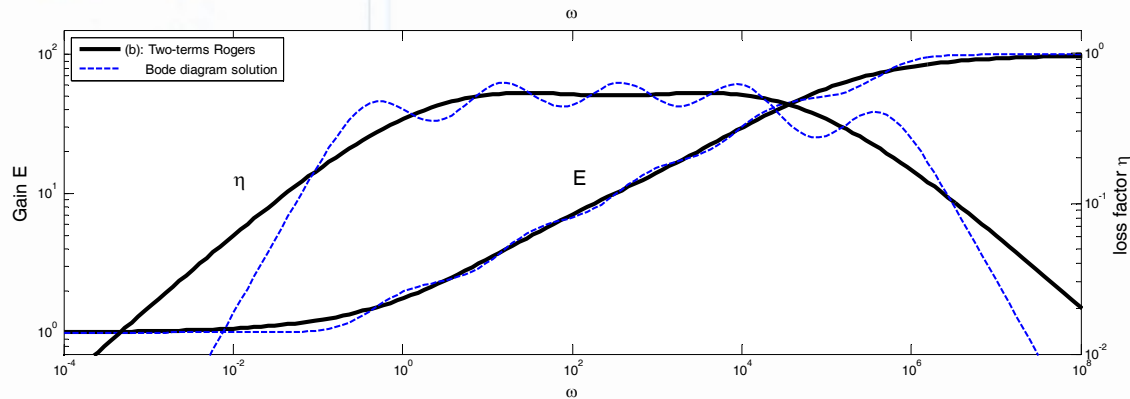
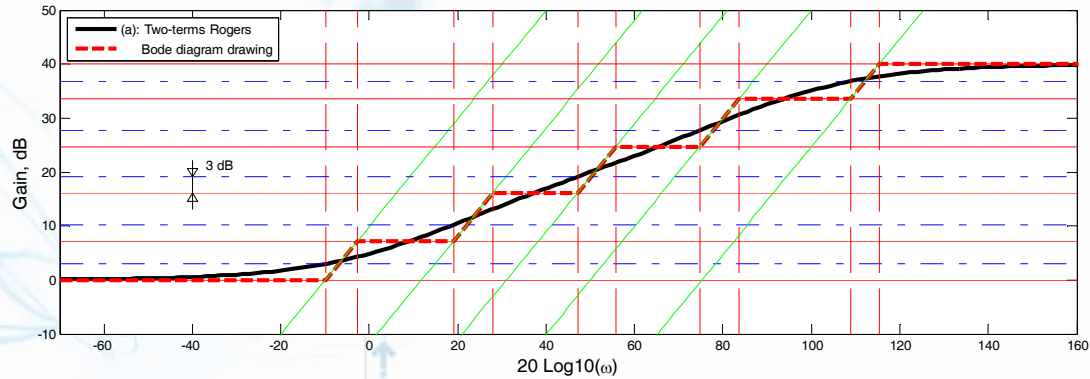
Courriel: [tibi.beda@supméca.fr](mailto:tibi.beda@supméca.fr), [tbeda@yahoo.com](mailto:tbeda@yahoo.com)

**Journée Européenne sur la Dérivée Fractionnaire en Mécanique,  
Etat-de-l'Art et Application,  
17 novembre 2006, CNAM, Paris.**



# Méthode de Bode

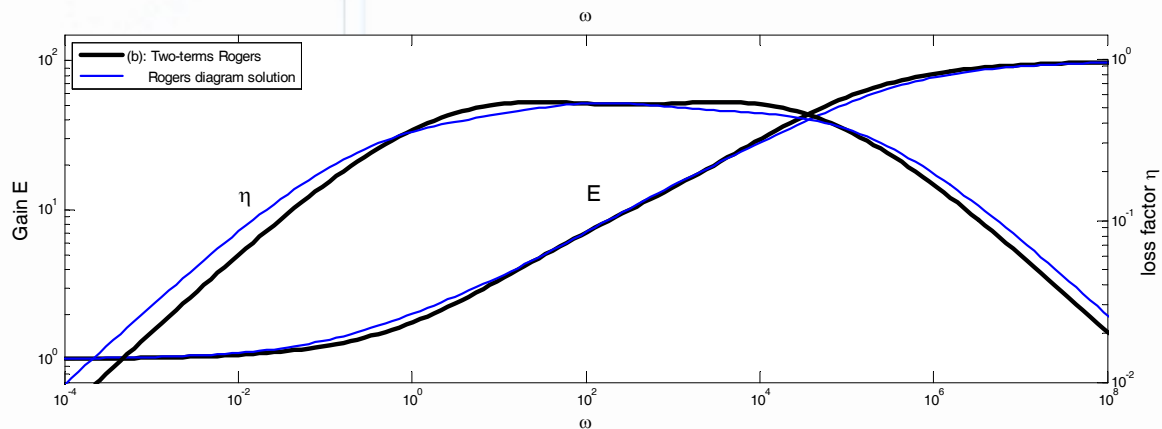
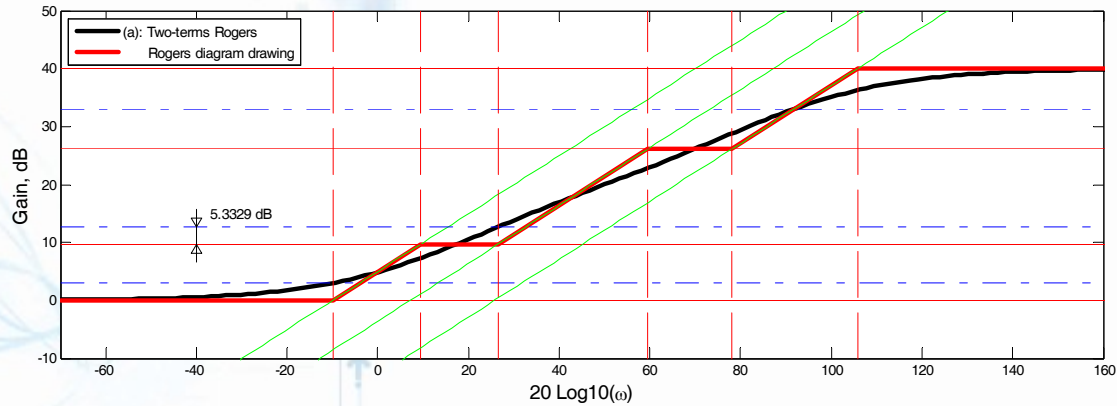
Simulation d'un modèle de Rogers à deux termes (4 fréquence de coupure)  
*Solution: 10 fréquences de coupure*



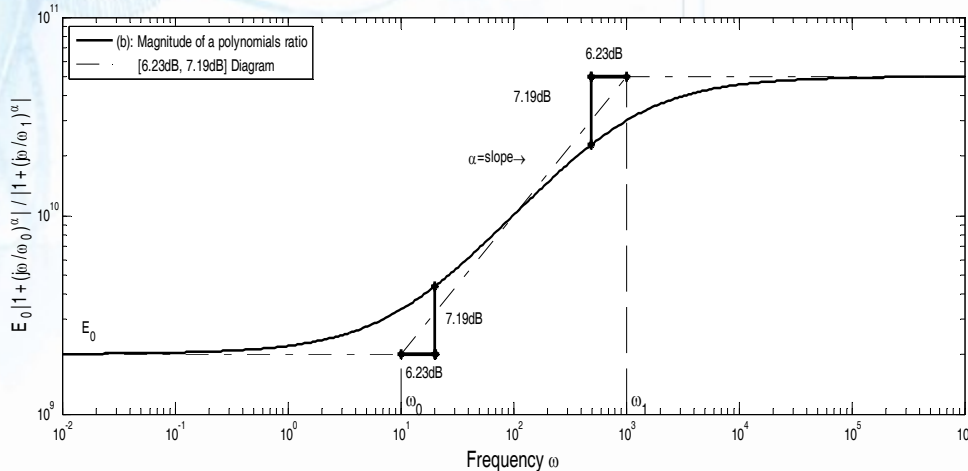
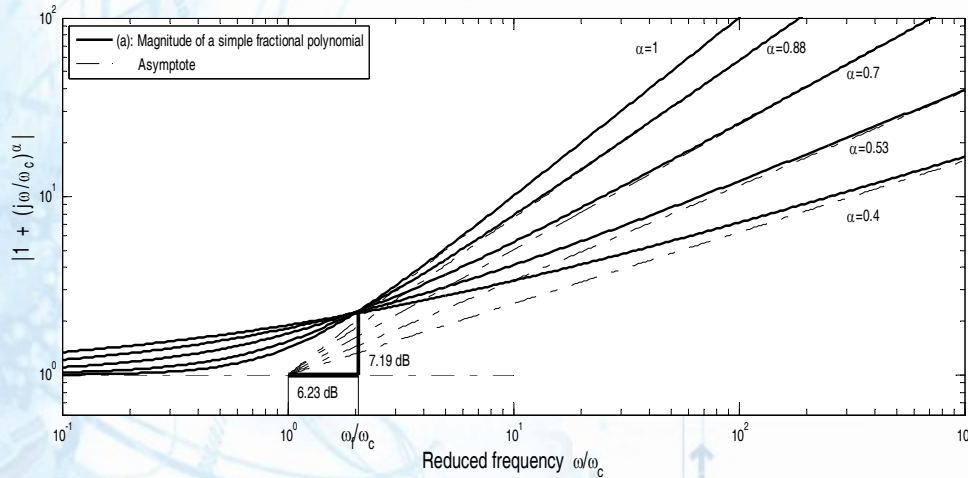


# Méthode de Rogers

Simulation d'un modèle de Rogers à 2 termes (4 fréquences de coupure)  
*Solution: 6 fréquences de coupure*



# Méthode et Diagramme [6.23 dB, 7.19 dB]

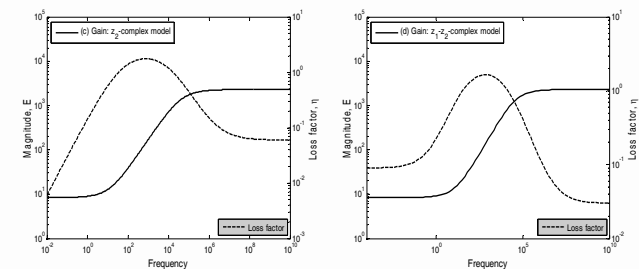
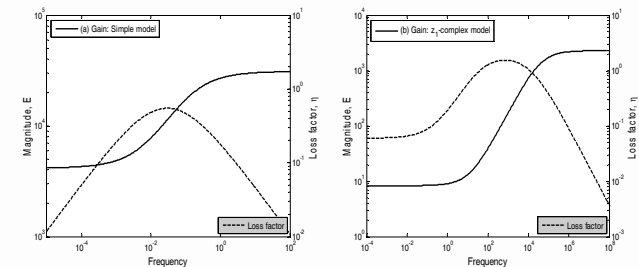


Matériau simple

$$E^*(\omega) = E_0 \frac{1 + (j\omega/\omega_0)^\alpha}{1 + (j\omega/\omega_1)^\alpha}$$

Matériau complexe

$$E^*(\omega) = \frac{z_1^* + z_2^* (j\omega)^\alpha}{1 + r_1 (j\omega)^\alpha}$$



# Diagramme [6.23 dB, 7.19 dB] et Techniques dérivées

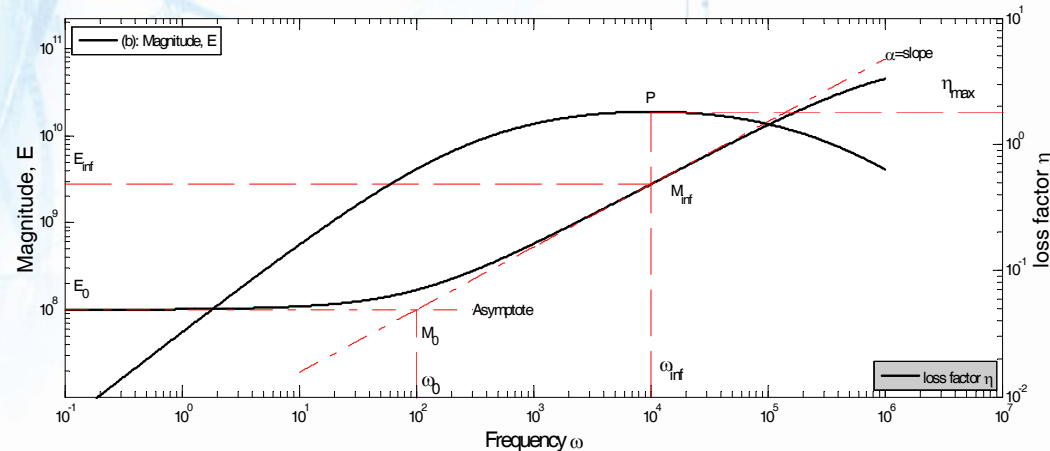
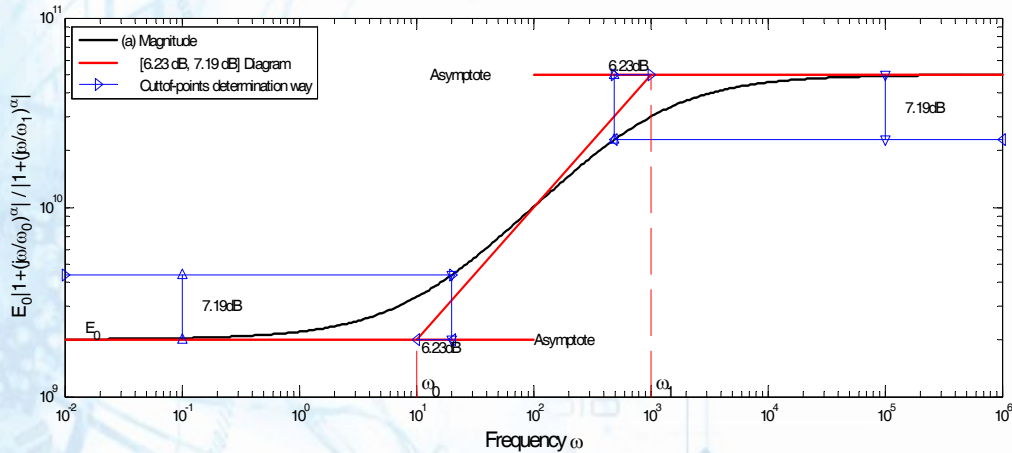


Diagramme  
[6.23 dB, 7.19 dB]

Techniques  
dérivées  
Domaine de fréquences  
restreint couvert par  
l'expérimentation

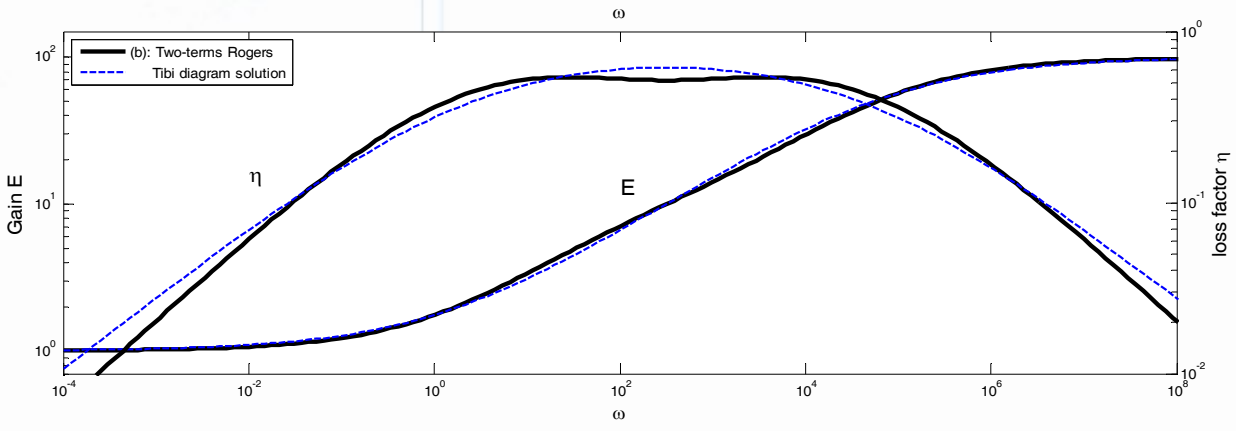
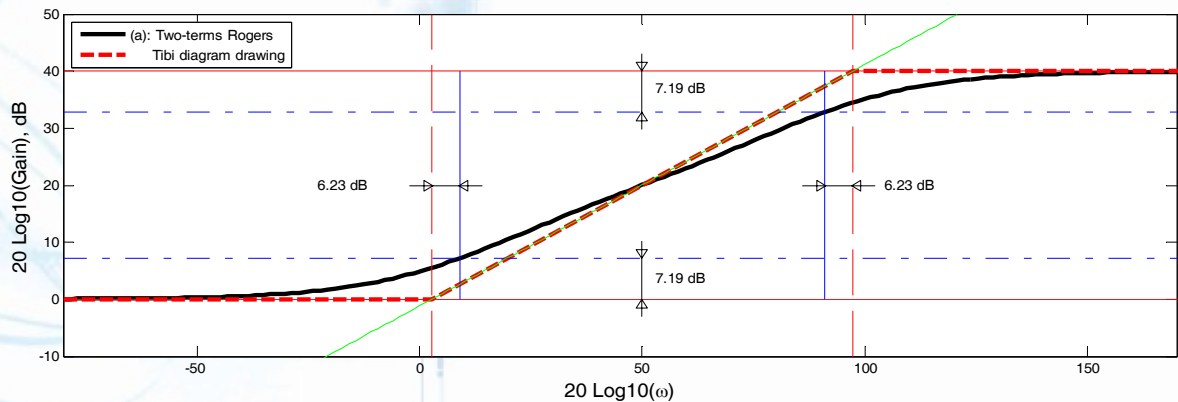
$$\eta(\omega) \approx \frac{2}{\pi} \text{Arg} \eta_{max}$$

$$\omega_0 = \omega_{inf} \alpha \sqrt{\frac{E_0}{E_{inf}}}$$

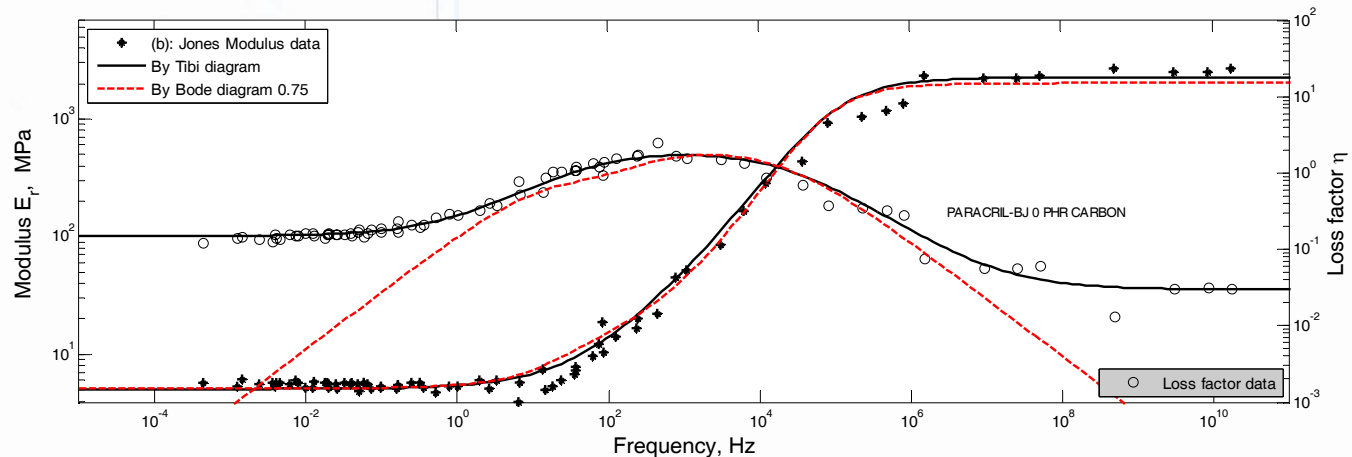
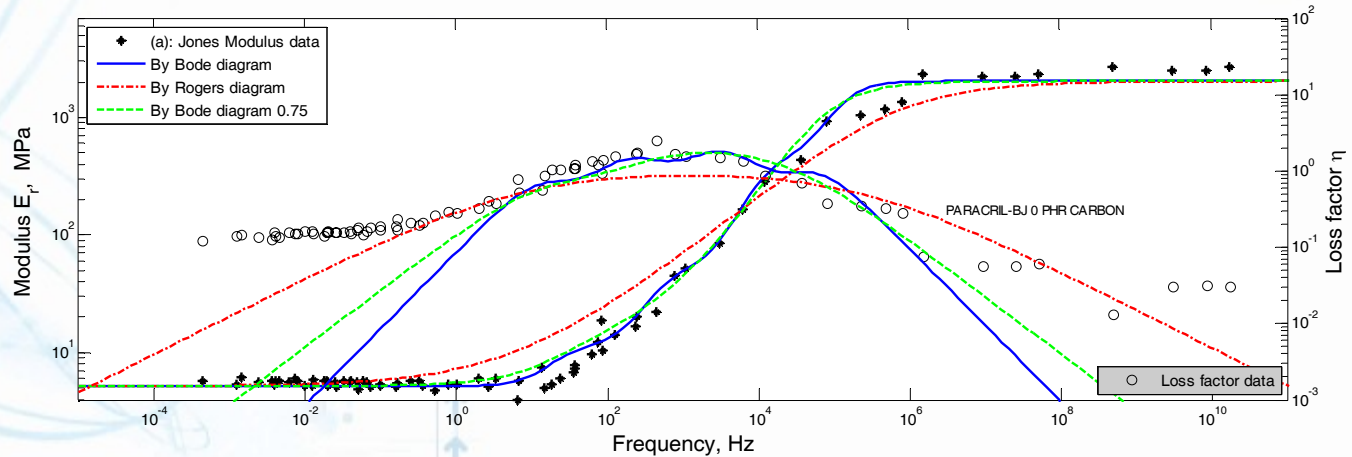
$$\omega_1 = \omega_{inf} \alpha \sqrt{\frac{E_{inf}}{E_0}}$$

# Méthode de [6.23 dB, 7.19 dB]

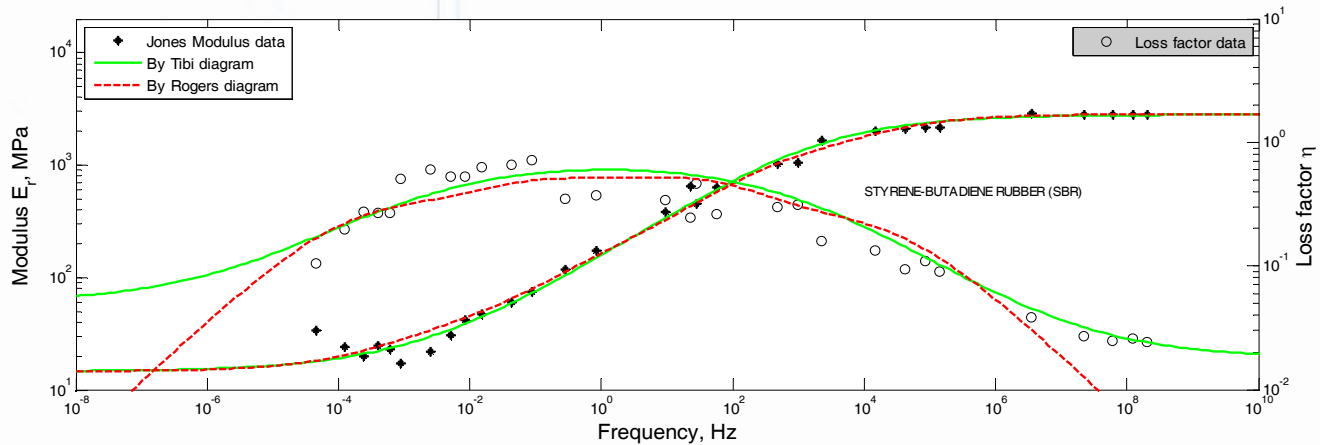
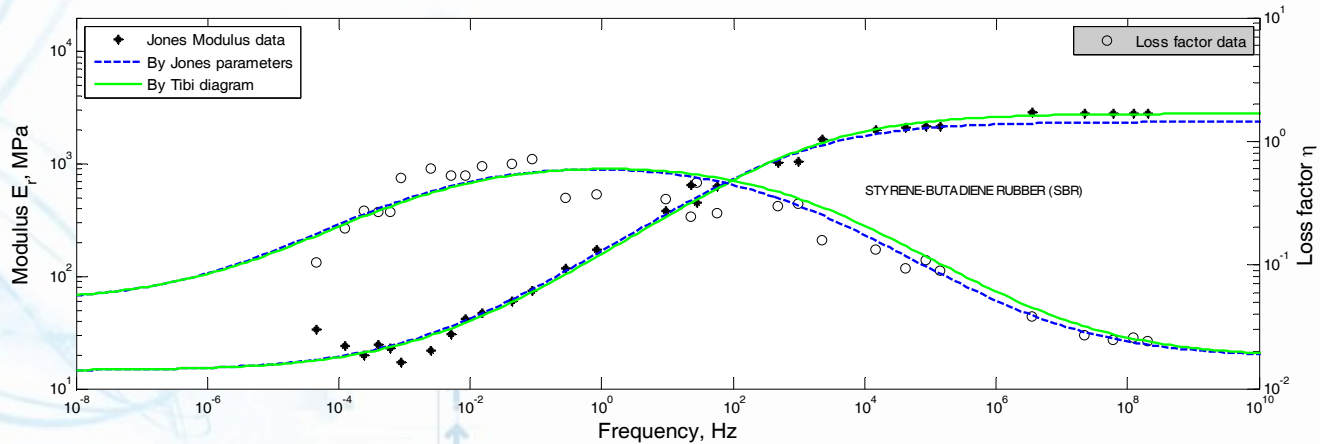
Simulation d'un modèle de Rogers à 2 termes (4 fréquences de coupure)  
*Solution: 2 fréquences de coupure*



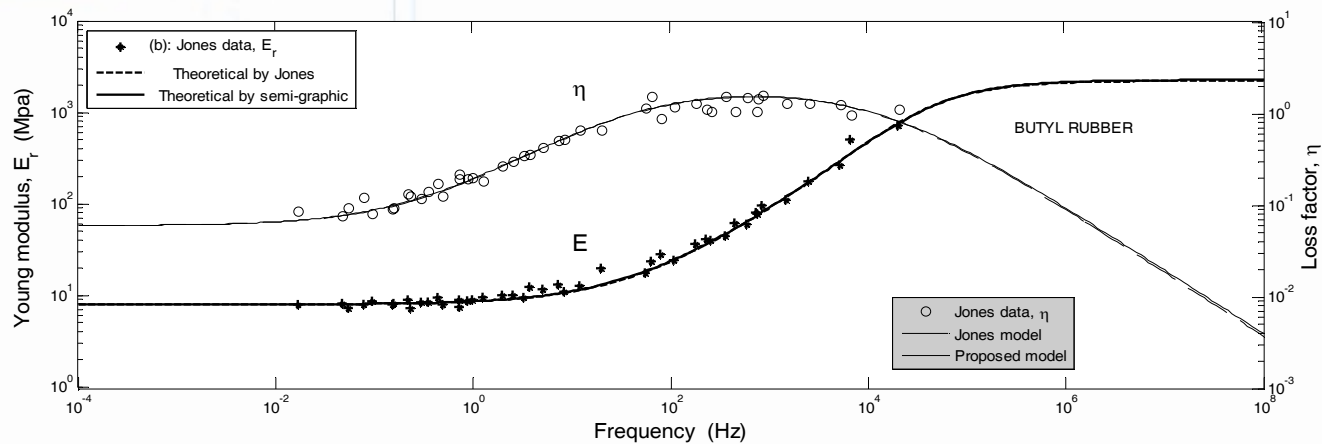
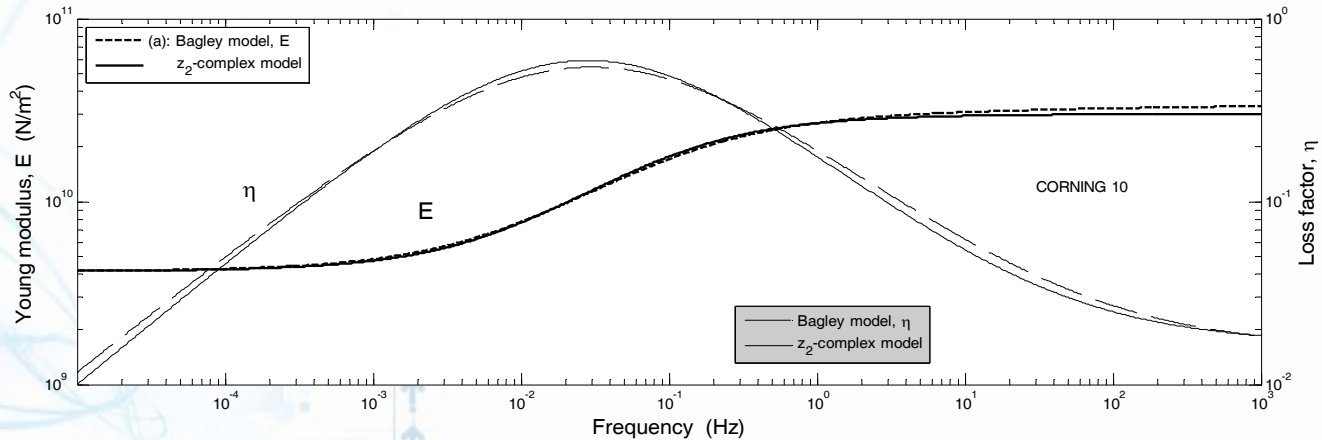
# Caractérisation du Paracril BJ0 PHR Carbon (Matériau complexe) par différentes méthodes d'identification



# Caractérisation du Styène-Butadiène (Matériau complexe) par différentes méthodes d'identification



# Caractérisation du Corning 10 et du Butyle (Matériaux semi-complexes) méthodes numériques et diagramme [6.23 dB, 7.19 dB]





# Caractérisation du Polyisobutylène et Paracril BJ0 PHR Carbon (Matériaux complexes) méthodes numériques et diagramme [6.23 dB, 7.19 dB]

