

**MODELISATION ET SIMULATION
D'ECOULEMENTS
DE SUSPENSION DE CORPS SOLIDES**

P. Laure, G. Beaume, T. Coupez, L. Silva et H. Dignonnet

Approche multidomaine :

→ Fonction caractéristique

→ Interface « floue »

- Calcul de la contrainte sur un corps solide

- Tension superficielle

- Déplacement des particules

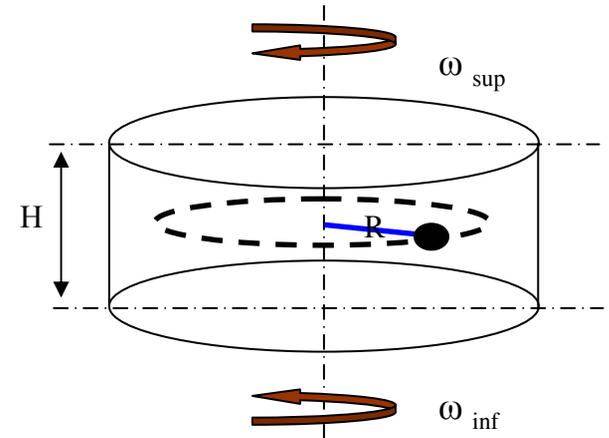
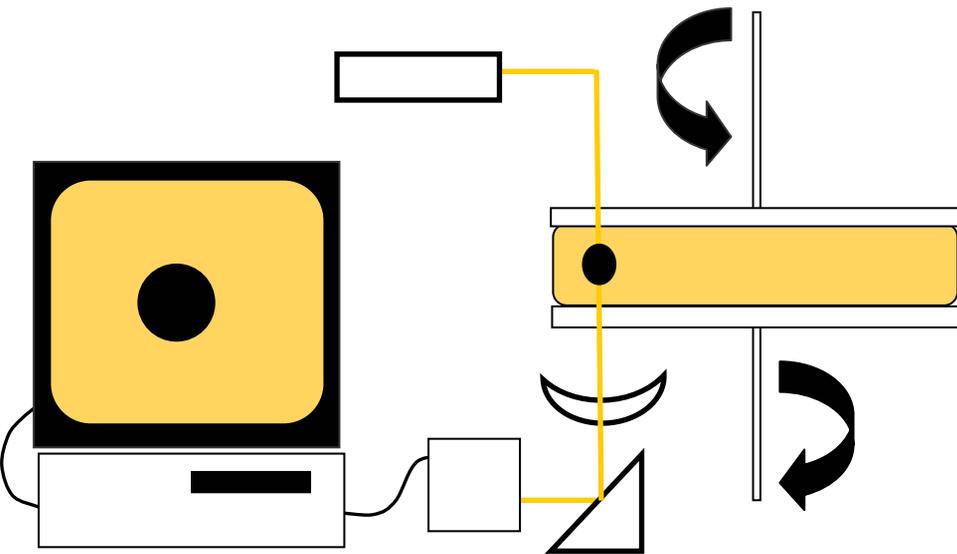
- (Ajout de forces de répulsion)

- (Conditions aux limites périodiques)

Expériences

Edith PEUVREL-DISDIER et Céline Roux

La rhéo-optique Le rhéomètre contra-rotatif transparent

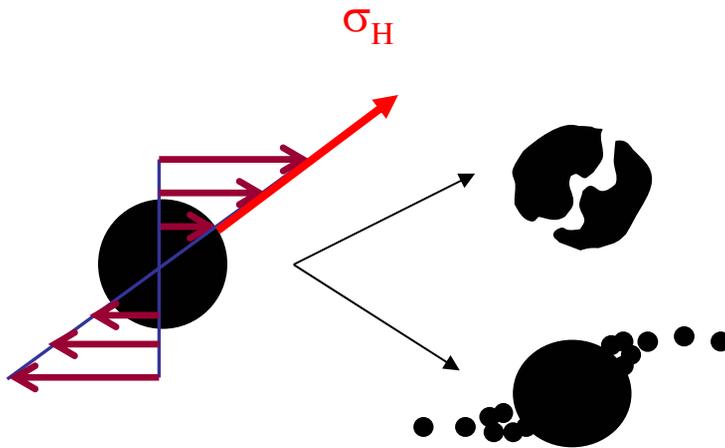


$$\dot{\gamma} = \frac{(\omega_{\text{inf}} + \omega_{\text{sup}}) \times R}{H}$$

Mécanismes de dispersion pour une charge isolé

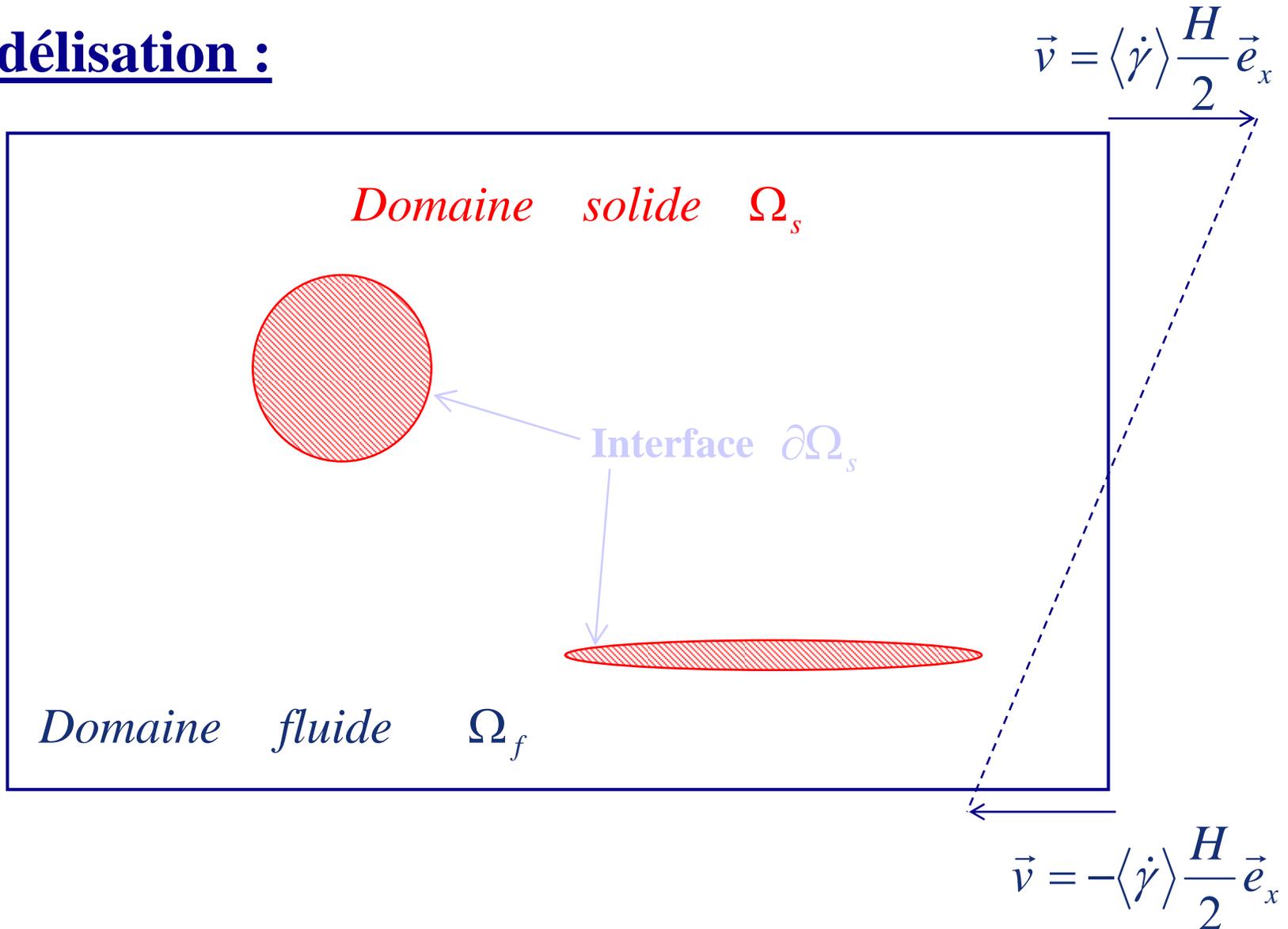
Observation: cisaillement simple

→ contrainte critique de dispersion?



$$\sigma_H \gg \sigma_{\text{coh}}$$

Modélisation :



Modélisation :

● fluide:

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} = 0 \quad (\text{Navier Stokes en injection})$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p \underline{\underline{I}}_d + 2\eta_f \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{u}) \quad (\text{comportement newtonien})$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{incompressibilité})$$

● particules: sphère/bâtonnet

$$\vec{F}_h + \vec{F}_p = \int_{\partial\Omega_s} \underline{\underline{\sigma}} \vec{n} d\Gamma + \vec{F}_p \approx \vec{0} \quad (\text{Bilan de forces})$$

$$\vec{\Gamma}_h + \vec{\Gamma}_p \approx \vec{0} \quad (\text{Bilan de moments})$$



$$\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{u}) = \vec{0}$$

(Contrainte de rigidité)

Equations pour le domaine solide

$$\rho_s \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right] = \rho_s \vec{g} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{u}) &= 0 \end{aligned}$$

Mouvement de corps rigide

$$\begin{aligned} [[\vec{u}]]_{\partial\Omega_s} &= 0 \\ [[\underline{\underline{\sigma}} \cdot \vec{n}]]_{\partial\Omega_s} &= 0 \end{aligned}$$

Conditions aux limites

Tenseur des
contraintes

$$\underline{\underline{\sigma}} = \eta_s \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(\vec{u}) - p \mathbb{I} + \underline{\underline{\lambda}}$$

Facteur de pénalisation

Multiplicateur de Lagrange

Approche multi-domaines: (« domaines fictifs »)

la frontière est définie par l'isovaleur zéro de la fonction "level set" α (approximation P1)

$$\alpha(x) = \|x - \Gamma_f\| \quad \text{dans } \Omega_s \quad \text{et} \quad \alpha(x) = -\|x - \Gamma_f\| \quad \text{dans } \Omega_f$$

Fonction caractéristique

$$\mathbb{I}(x,t) = \begin{cases} = 1 & \text{if } \alpha(x) > 0 \\ = 0 & \text{if } \alpha(x) < 0 \end{cases}$$

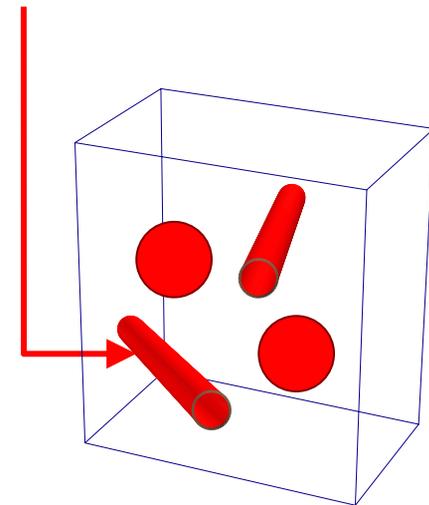
avec une transition régulière de taille e

$$\mathbb{I}(x,t) = \begin{cases} = 1 & \text{if } \alpha(x) > e \\ = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2e} & \text{if } -e < \alpha(x) < e \\ = 0 & \text{if } \alpha(x) < -e \end{cases}$$

relation de mélange :

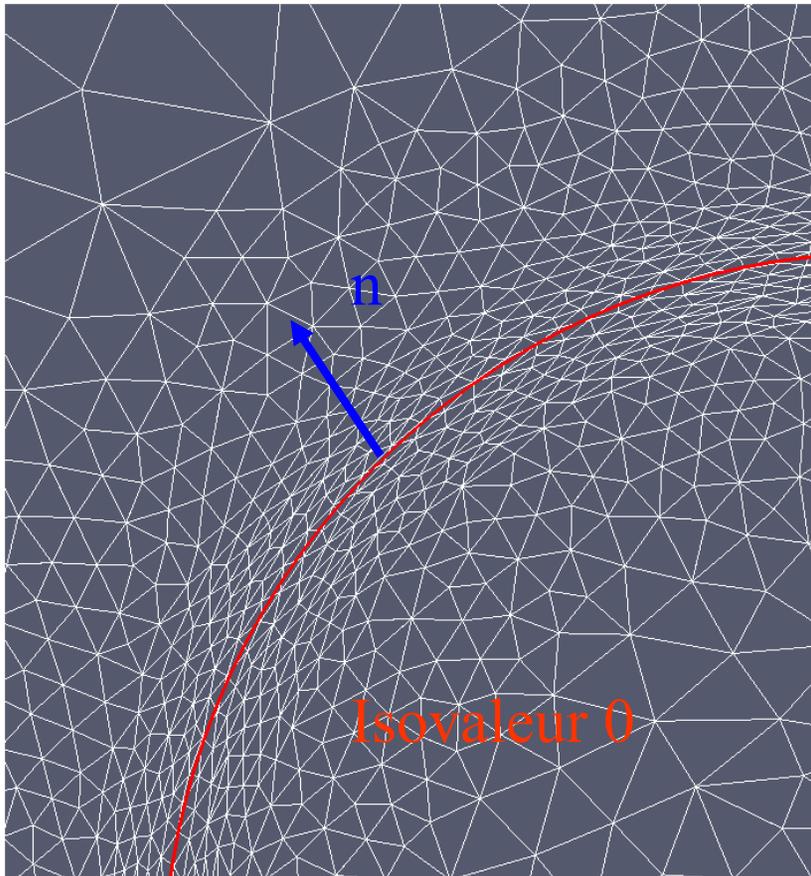
$$\eta = \eta_s \mathbb{I} + (1 - \mathbb{I}) \eta_f$$

Fonction caractéristique \mathbb{II}



Enrichissement à l'interface, h-adaptation

Métrique multidomaine : e épaisseur de lissage et N nombre d'éléments



$$M = \begin{cases} \varepsilon^2 I & \text{si } |\alpha| > e/2 \\ (N/e - \varepsilon^2)B + \varepsilon^2 I & \text{si } |\alpha| < e/2 \end{cases}$$

avec

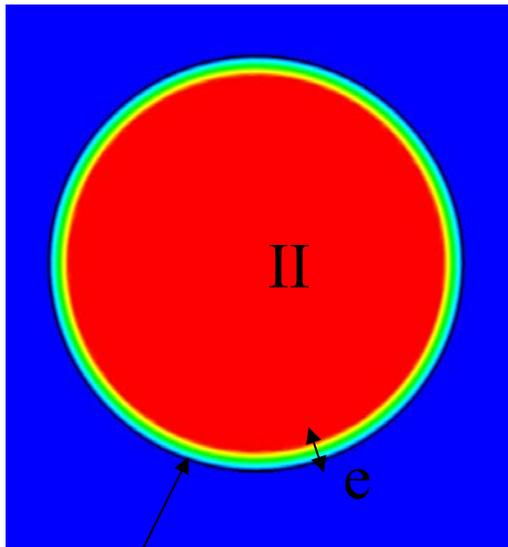
$$B = \frac{\nabla \alpha \otimes \nabla \alpha^T}{\|\nabla \alpha\|^2}$$

$$n = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|}$$

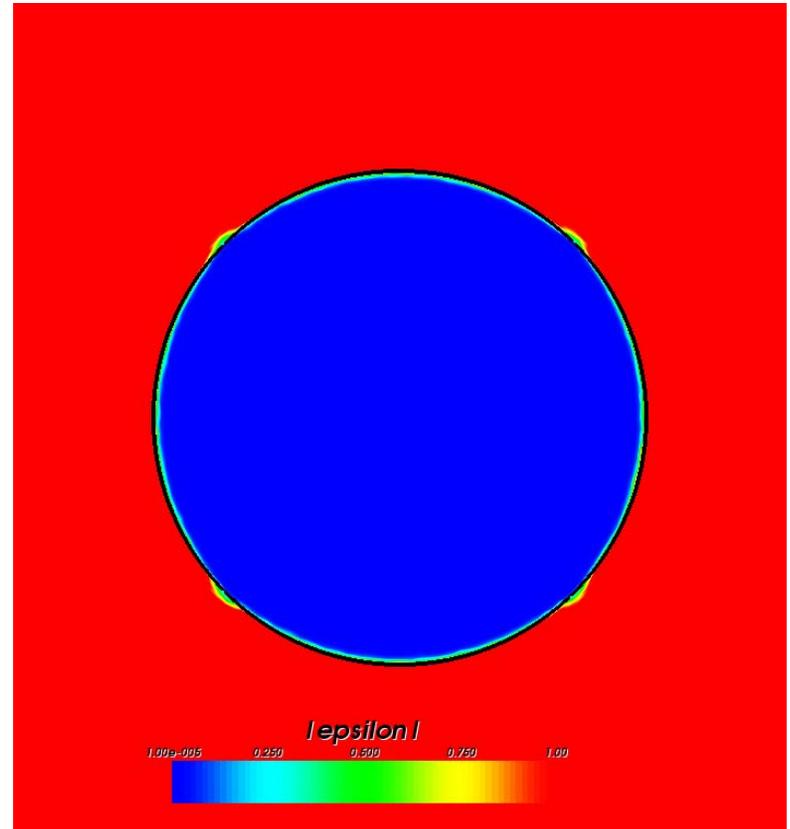
une sphère de rayon a en cisaillement

Comparaison avec solution analytique Batchelor-Green (74) :

→ mouvement de rotation $T = \frac{4\pi}{\gamma}$



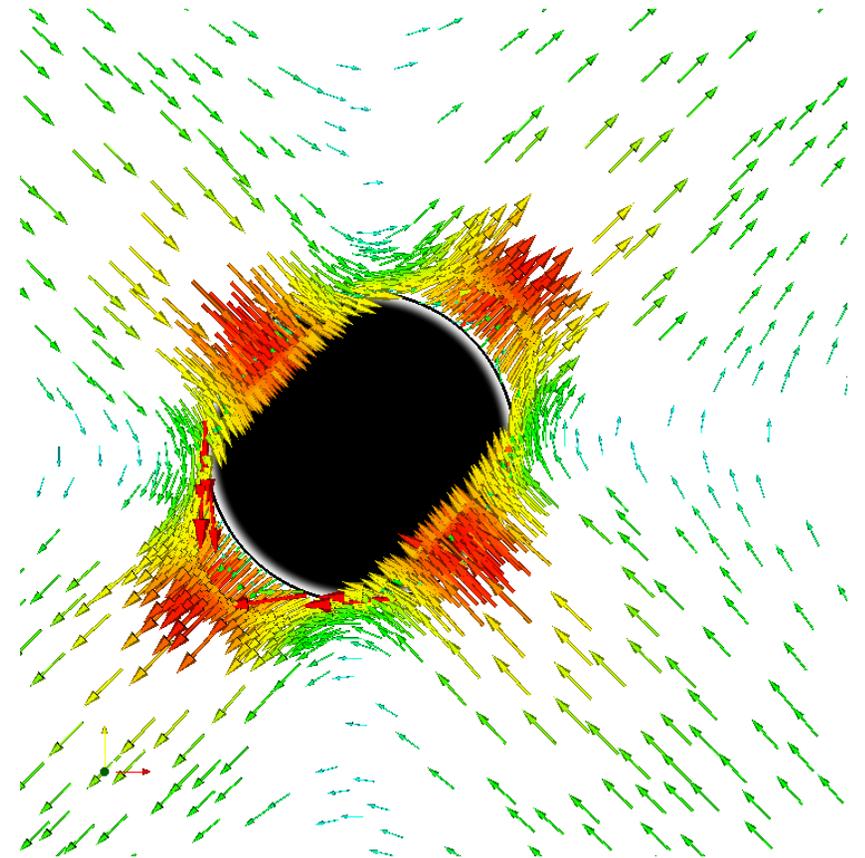
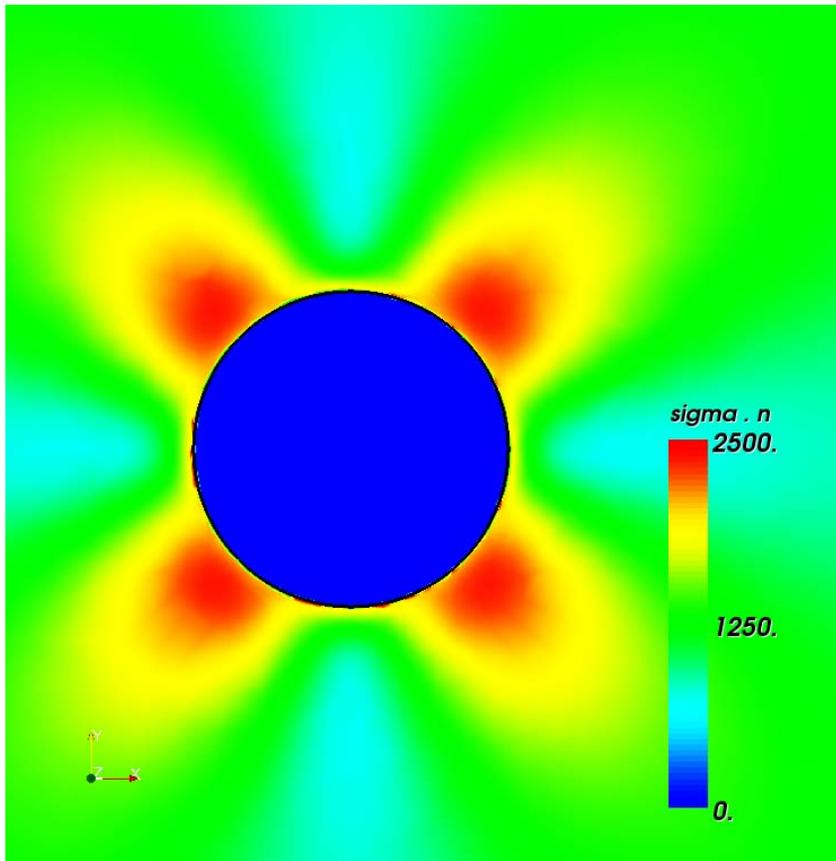
isovaleur 0



$a = .05$; boîte 2x1; $\eta_s = 100 \eta_f$

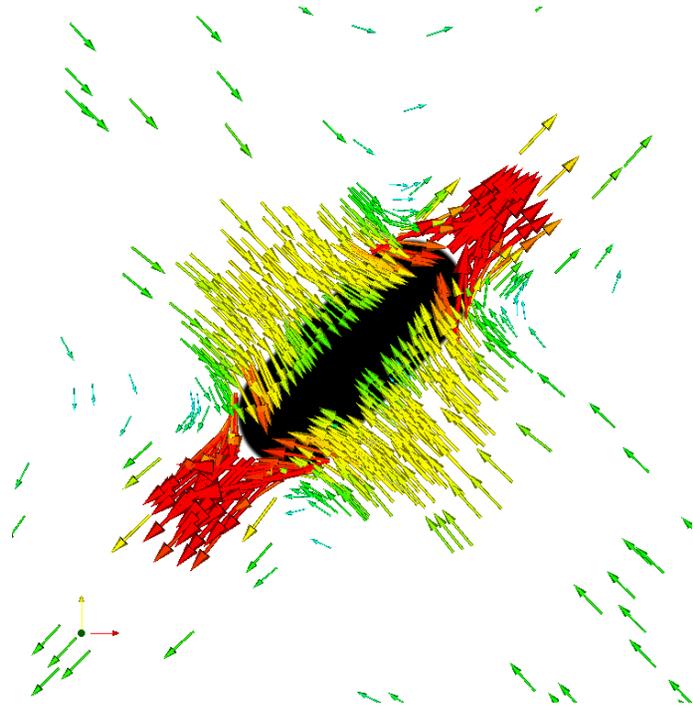
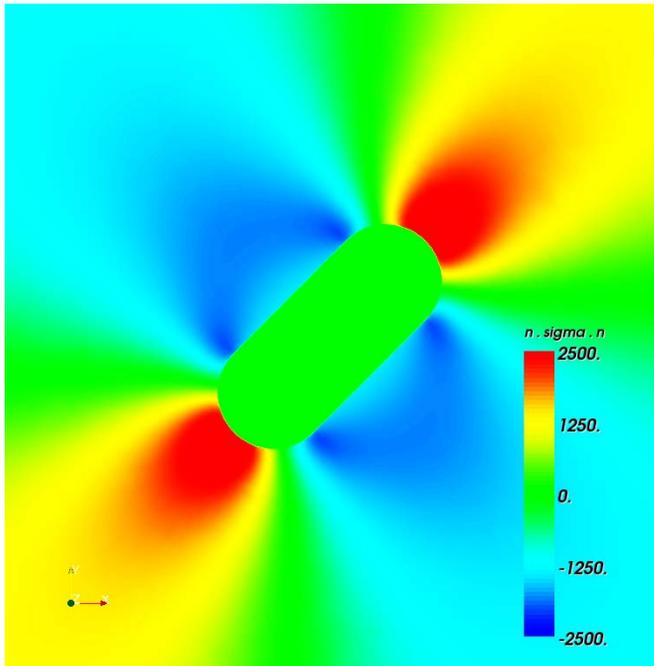
Une sphère en cisaillement

$\sigma \cdot n$



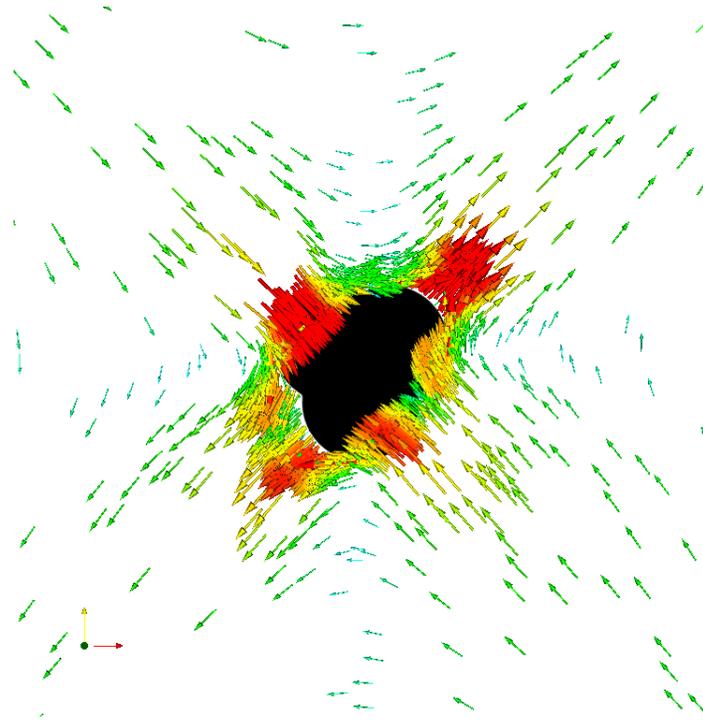
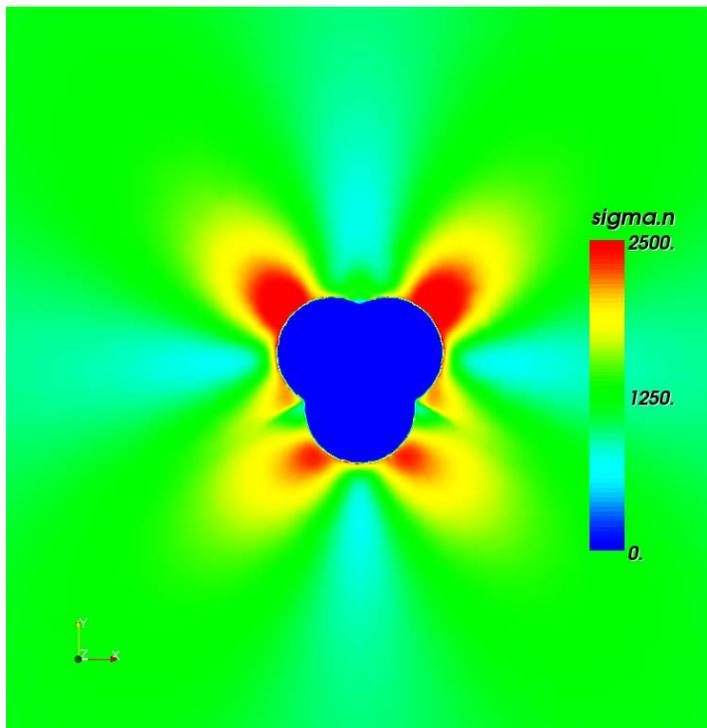
Une fibre en cisaillement

$\sigma \cdot n$



un « triangle » en cisaillement

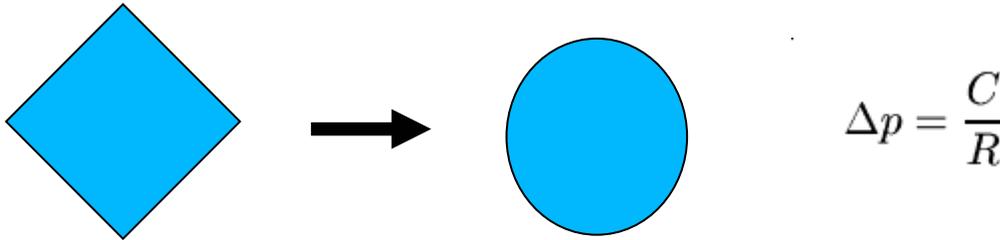
$\sigma \cdot n$



Tension de surface

saut de contrainte à l'interface Γ :

$$[[\sigma n]] = \frac{C}{R}n \quad R \text{ la courbure et } C \text{ la tension de surface}$$



nouveau terme dans la formulation variationnelle (A. Fortin 2005)

$$\int_{\Gamma} \frac{C}{R} n \cdot w d\Gamma = \int_{\Omega} C \frac{\nabla \mathbb{I}}{R} \cdot w d\Omega = \int_{\Omega} C \frac{\nabla \mathbb{I} \otimes \nabla \mathbb{I} - |\nabla \mathbb{I}|^2 Id}{|\nabla \mathbb{I}|} : \nabla \cdot w d\Omega$$

avec la fonction caractéristique

$$\mathbb{I}_e = \begin{cases} = 0 & \text{if } \alpha < -e \\ = 1 & \text{if } \alpha > e \\ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{e} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\pi \frac{\alpha}{e}\right) \right) & \text{if } -e < \alpha < e \end{cases}$$

Displacement de la level Set

→ keep $|\nabla \alpha| \sim 1$ around Γ_f

Initial property

$$|\nabla \alpha| = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2E} \alpha\right)^2}$$

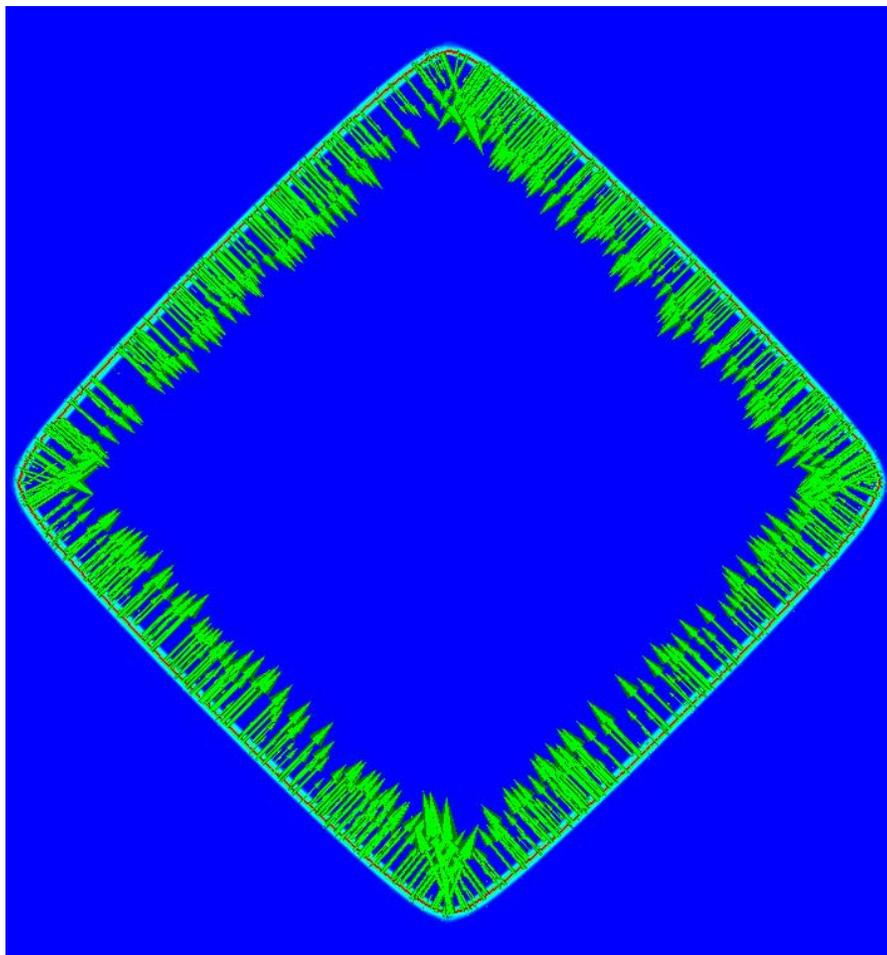
Transport equation

regularization

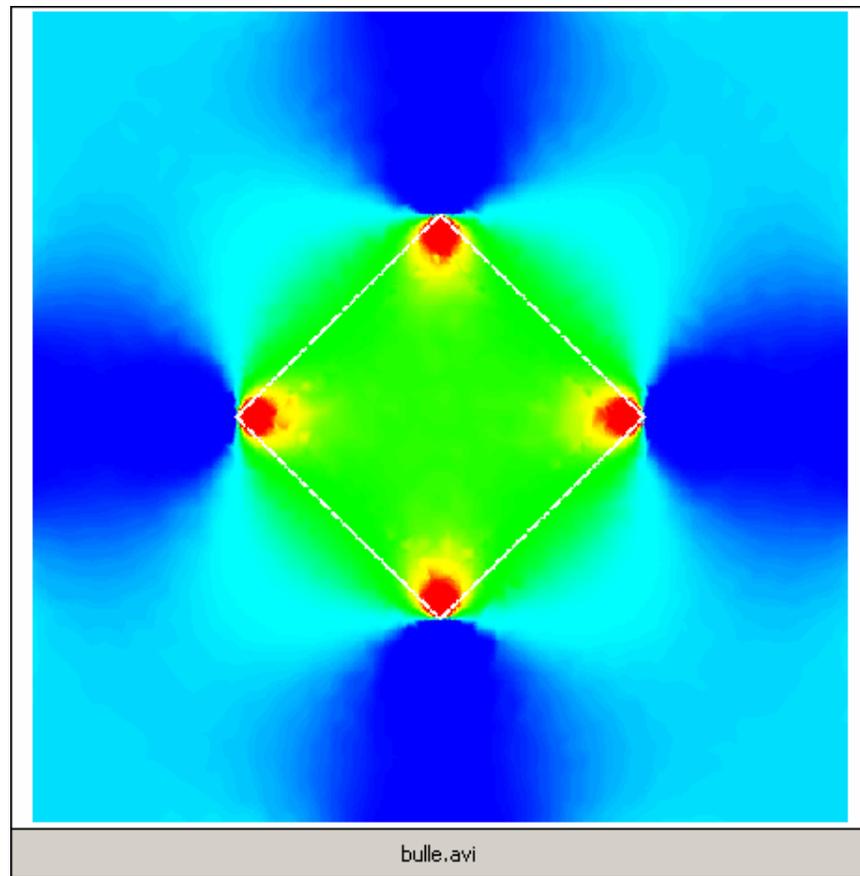
$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \cdot \nabla \alpha + \lambda s \left(|\nabla \alpha| - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{2E} \alpha\right)^2} \right) = 0 \\ \alpha(t=0, x) = \alpha_o(x) \end{cases}$$

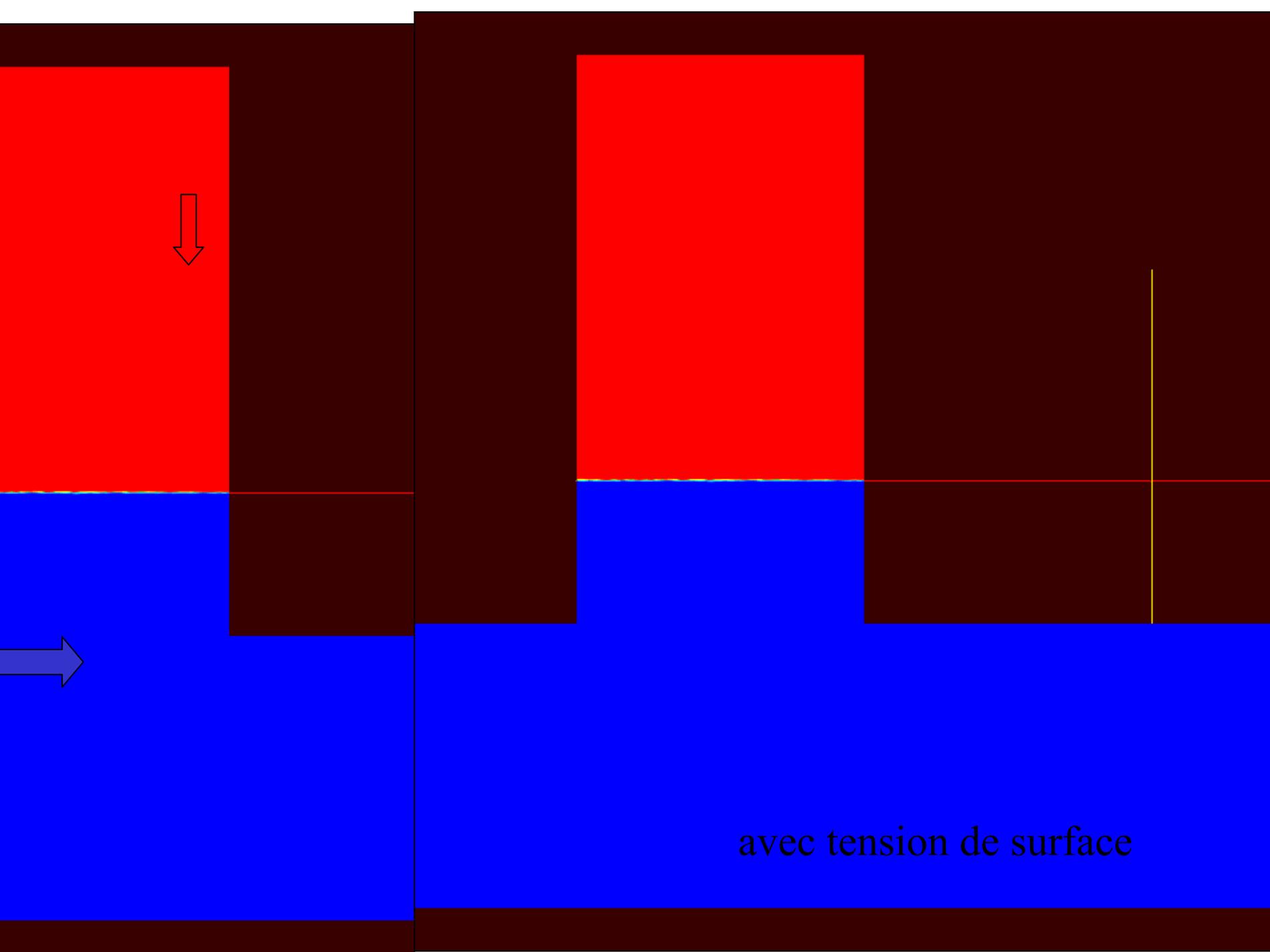
λ and E depend on mesh and time step

grad II et le Tenseur de courbure



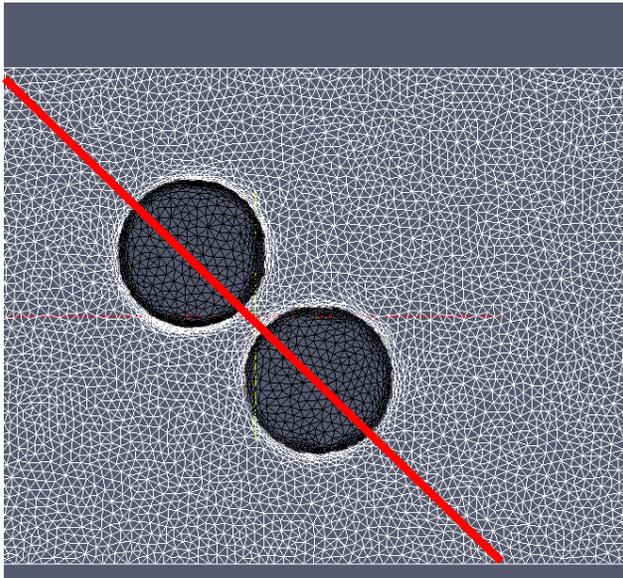
pression





avec tension de surface

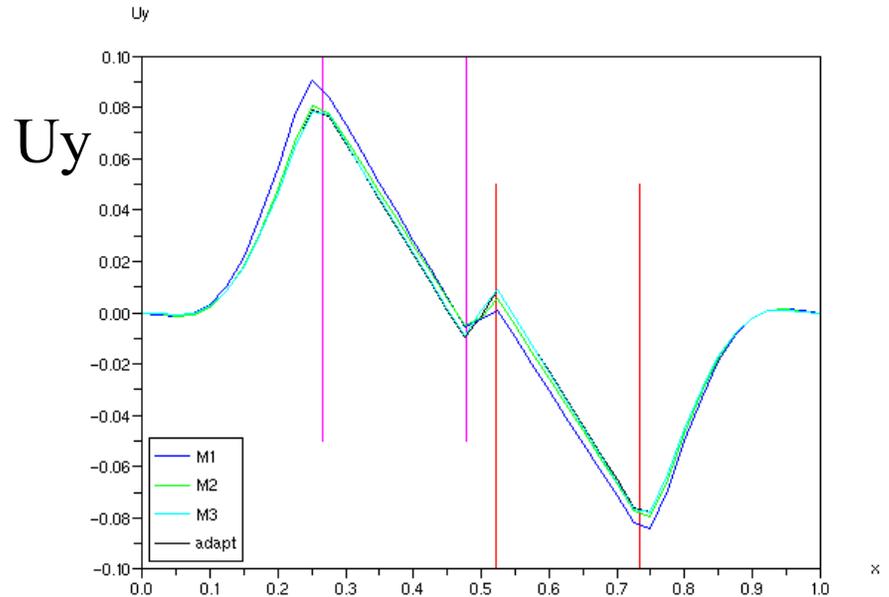
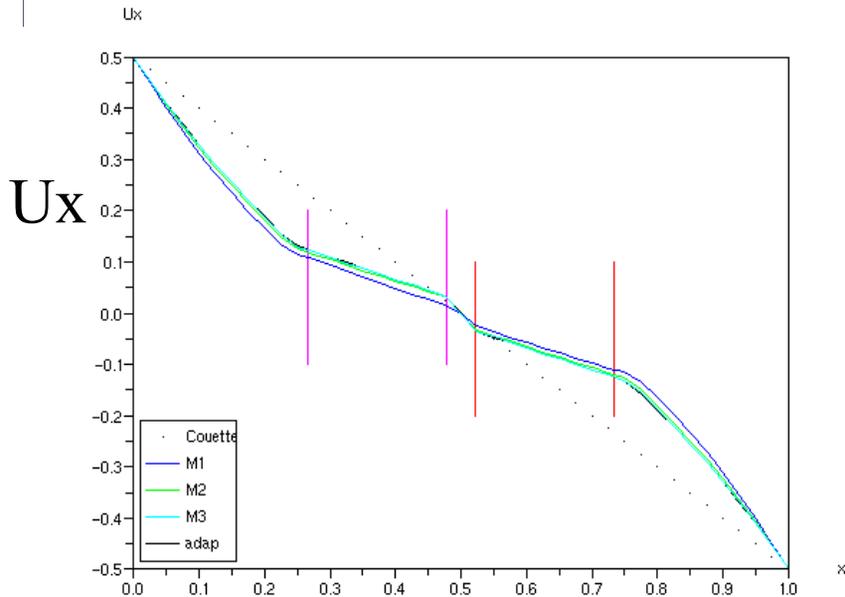
Interaction entre particules



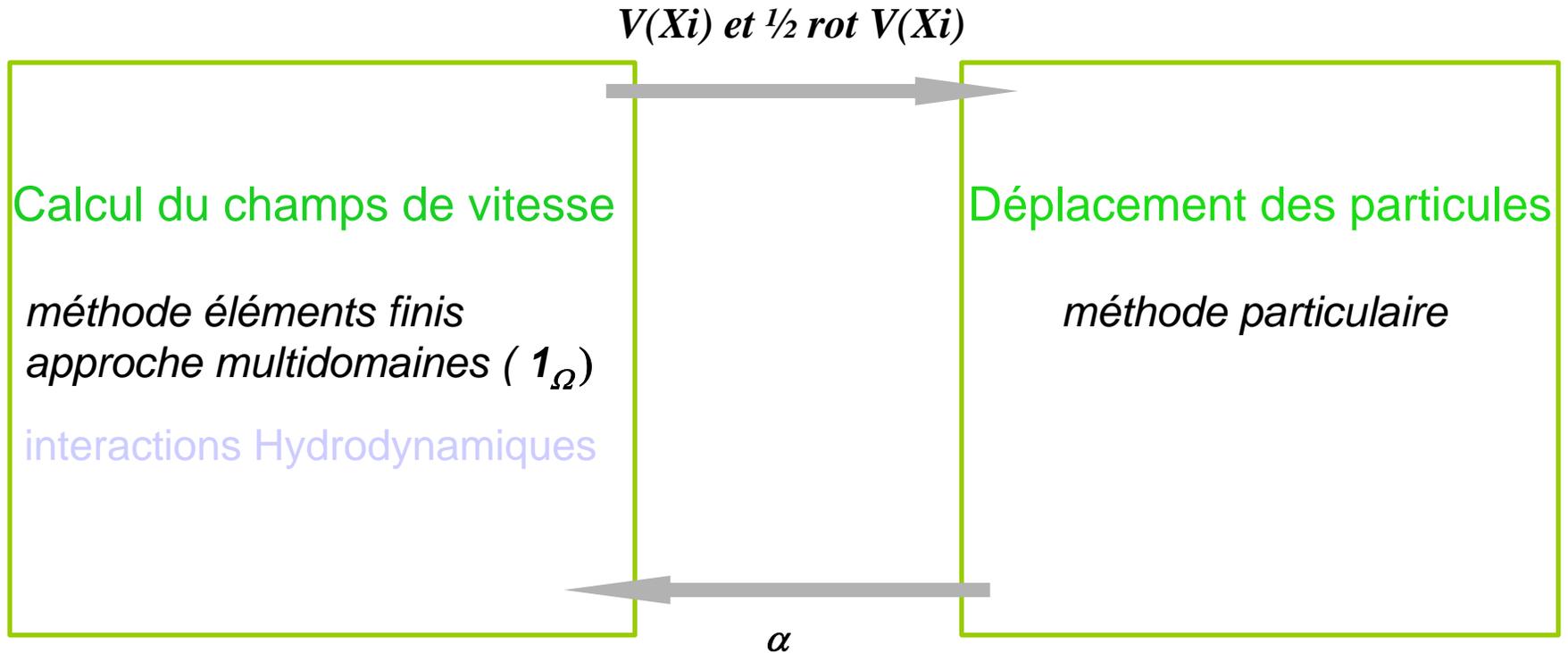
M_1	= 12 161 elts	6 218 noeuds	0.02
M_2	= 50 506 elts	25 543 noeuds	0.01
M_3	= 201 922 elts	101 097 noeuds	0.005
M_h			



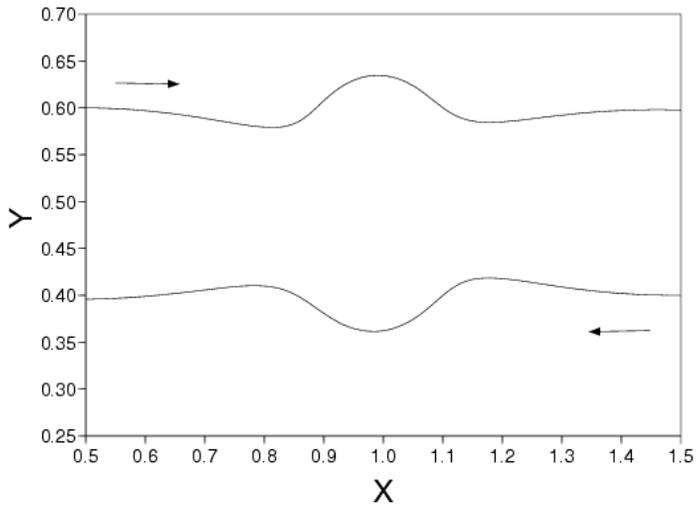
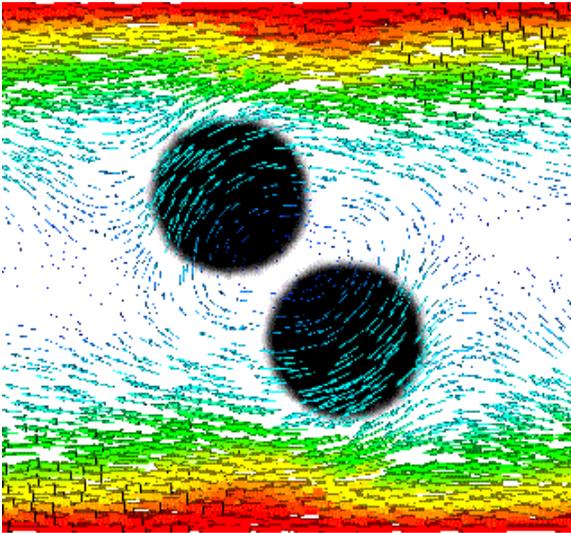
Pas d'influence sur la vitesse au centre des particules



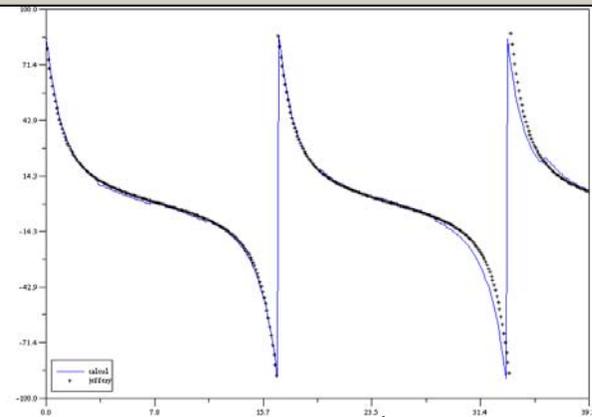
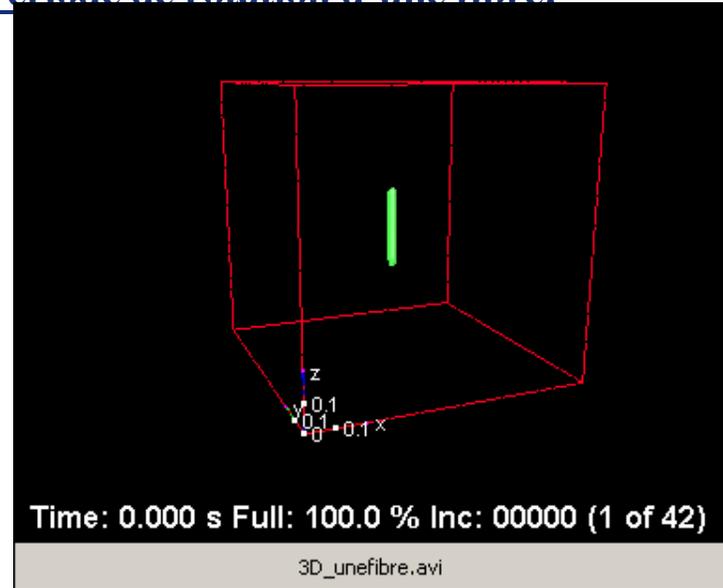
Déplacement Lagrangien



■ Cas tests: Domaine= carré/cube élémentaire



Période de rotation d'une fibre:



$$\Gamma = \frac{2\pi}{\dot{\gamma}} \left(\beta_{\text{ref}} + \frac{1}{\beta_{\text{ref}}} \right)$$

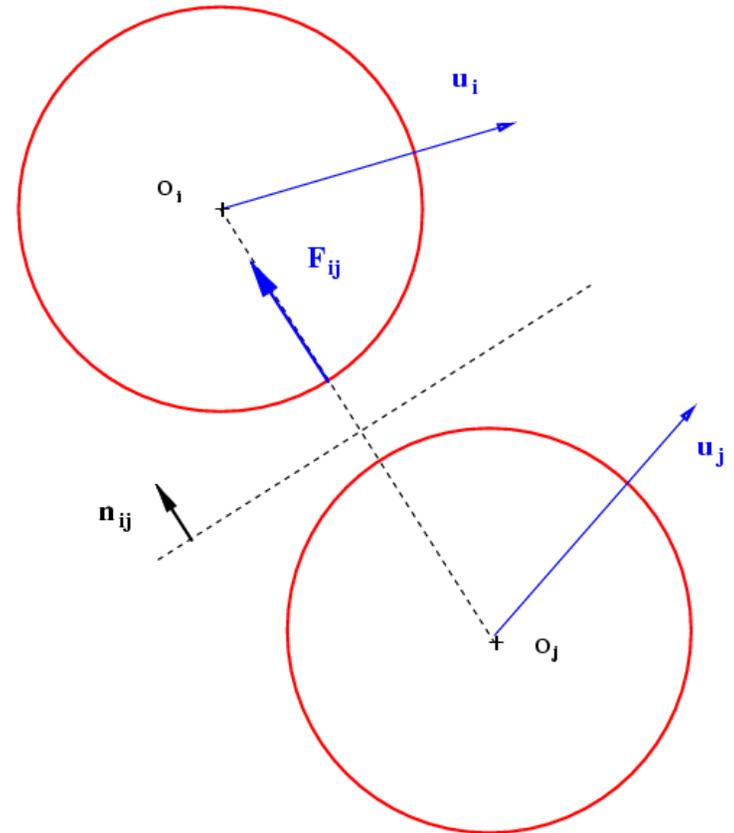
Sphères –forces hydr. de courte portée (concentration modérée)

Théorie de la lubrification :

force de répulsion exercée par j sur i // $\mathbf{n}_{ij} = \frac{\overrightarrow{O_j O_i}}{\|\overrightarrow{O_j O_i}\|}$

$$F_{ij} = -\frac{3}{2} \pi R^2 \eta \frac{(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j) \cdot \mathbf{n}_{ij}}{\|\overrightarrow{O_j O_i}\| - 2R} \mathbf{n}_{ij}$$

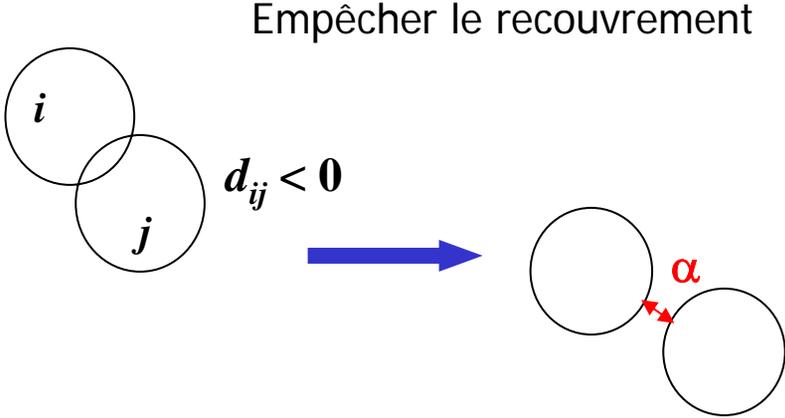
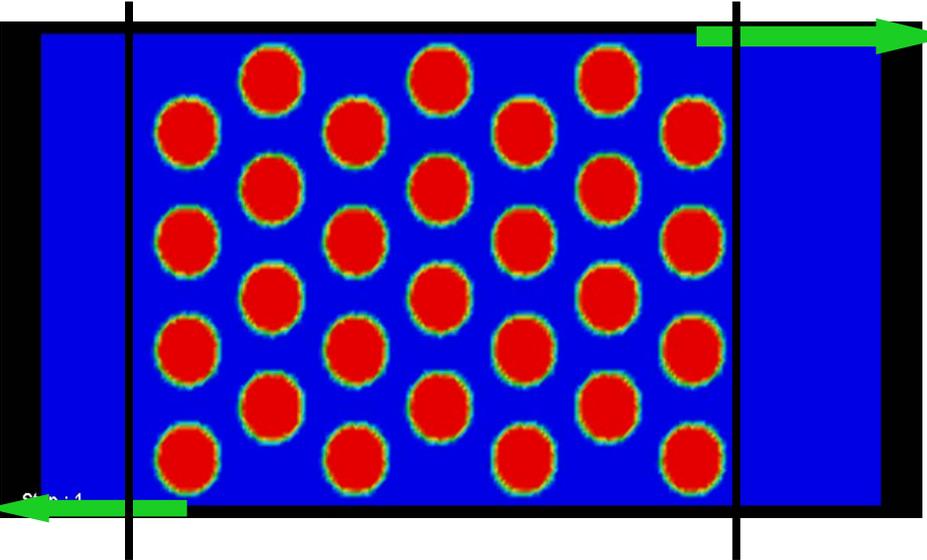
F_{ij}  avec $O_i \longrightarrow O_j$



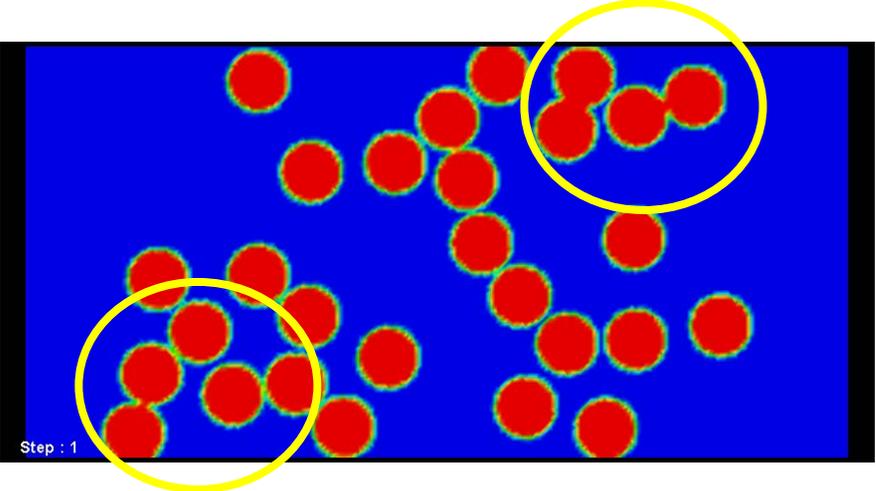
- Modifie \mathbf{u}_i et déplace O_i dans la direction \mathbf{n}_{ij}
- un calcul précis nécessite une petite région entre les sphères

$$\|\overrightarrow{O_j O_i}\| > 2R + \underline{\alpha} \quad \text{qui dépend du maillage}$$

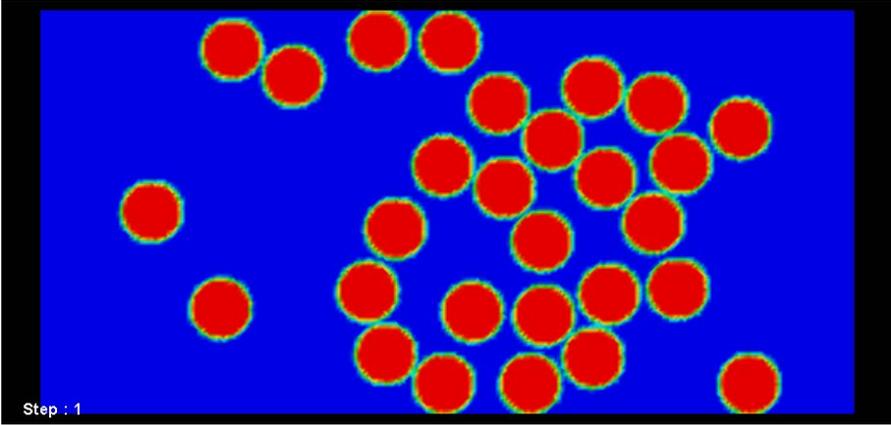
Exemples avec des Sphères



$\alpha = .005$



$t = 27$



$t = 30$

Ajout de forces courte portée : stratégie



- Remplacer forces et moments discrets par un champ de force continu EQUIVALENT:

$$\cancel{\vec{F}_p + \vec{\Gamma}_p} \longrightarrow \vec{f}(\vec{x})$$

- Terme supplémentaire dans la formulation variationnelle:

$$\cancel{\vec{F}_p \cdot \vec{V} + \vec{\Gamma}_p \cdot \vec{\xi}} \longrightarrow \int_{\Omega_s} \vec{f}(\vec{x}) \vec{w} d\Omega$$

Ajout de forces courte portée : cas d'une force seule



Mouvement
de corps rigide
De la particule

$$\longrightarrow \vec{V} = \frac{1}{Vol(\Omega_s)} \int_{\Omega_s} \vec{w} d\Omega$$

$$\vec{F}_p \cdot \vec{V} = \int_{\Omega_s} \left(\frac{\vec{F}_p}{Vol(\Omega_s)} \right) \vec{w} d\Omega = \int_{\Omega_s} \vec{f}_f(\vec{x}) \vec{w} d\Omega$$

$$\vec{f}_f(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{\vec{F}_p}{Vol(\Omega_s)} \text{ si } \vec{x} \in \Omega_s \\ \vec{0} \text{ si } \vec{x} \notin \Omega_s \end{cases}$$

Ajout de forces courte portée : cas d'un moment



Mouvement
de corps rigide
De la particule

$$\longrightarrow \underline{\underline{I}}_s \vec{\xi} = \int_{\Omega_s} (\vec{x} - \vec{X}_i) \wedge \rho_s \vec{w} d\Omega$$

$\underline{\underline{I}}_s$ Matrice d'inertie DIAGONALE

$$\underline{\underline{I}}_s = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} Vol(\Omega_s) R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} Vol(\Omega_s) R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} Vol(\Omega_s) R^2 \end{pmatrix}$$

Sphère

$$\underline{\underline{I}}_s = \begin{pmatrix} \frac{Vol(\Omega_s) L^2}{12} + \frac{Vol(\Omega_s) R^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} \frac{Vol(\Omega_s) L^2}{12} + \frac{Vol(\Omega_s) R^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Vol(\Omega_s) R^2}{2} \end{pmatrix}$$

Fibre

Ajout de forces courte portée : cas d'un moment



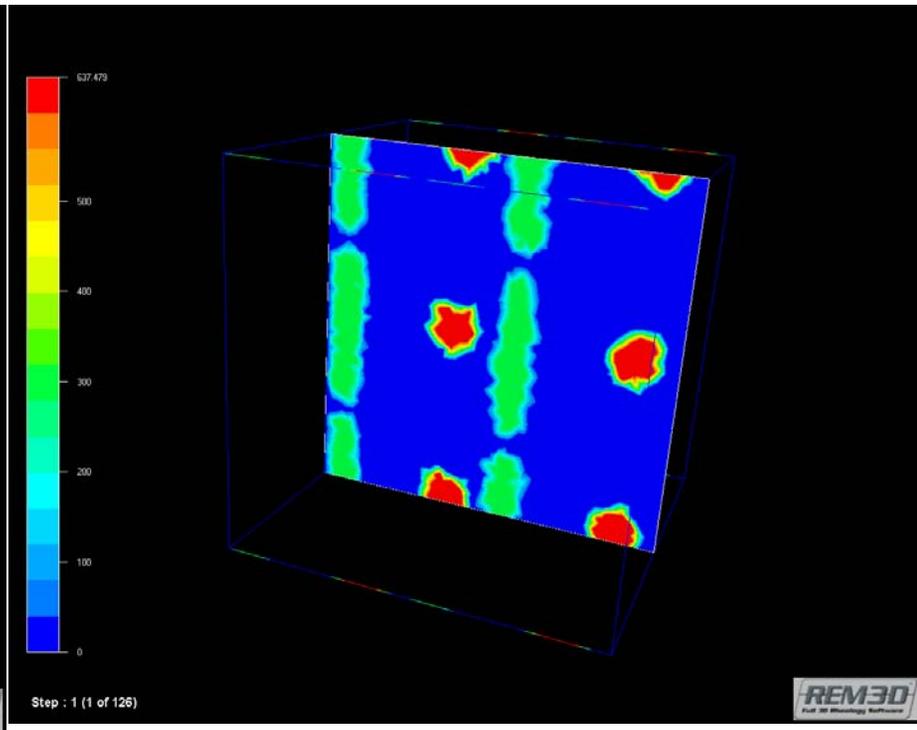
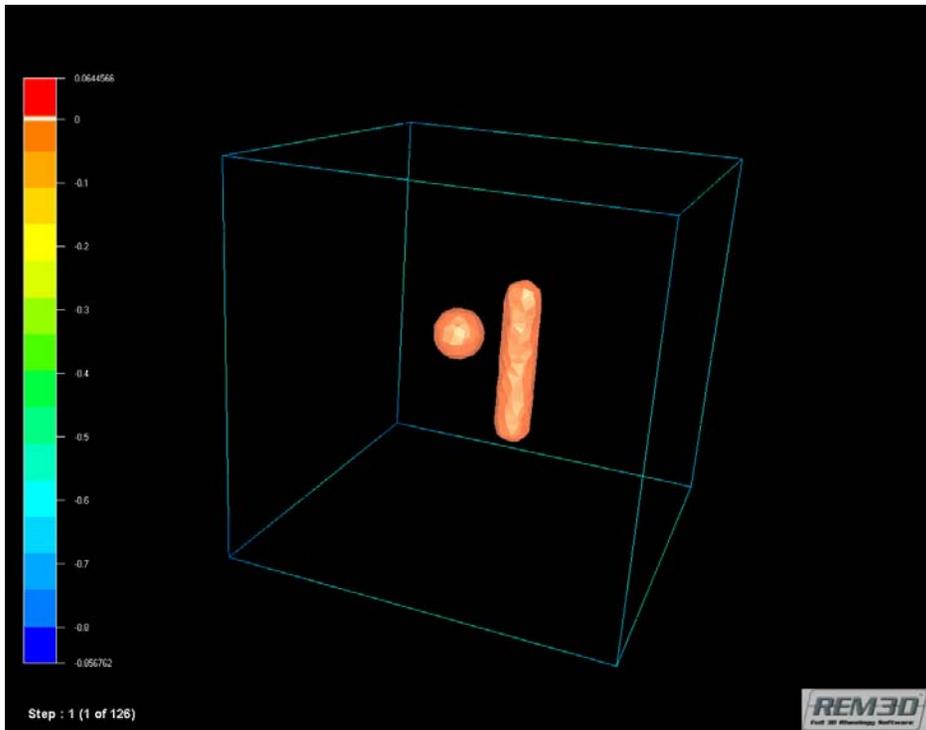
Mouvement
de corps rigide
De la particule

$$\longrightarrow \underline{I}_s \vec{\xi} = \int_{\Omega_s} (\vec{x} - \vec{X}_i) \wedge \rho_s \vec{w} d\Omega$$

$$\vec{\Gamma}_p \cdot \vec{\xi} = \int_{\Omega_s} \rho_s \vec{\Gamma}_p \cdot \underline{I}_s^{-1} \left((\vec{x} - \vec{X}_i) \wedge \vec{w} \right) d\Omega = \int_{\Omega_s} \underbrace{\left(\rho_s (\underline{I}_s^{-1} \vec{\Gamma}_p) \wedge (\vec{x} - \vec{X}_i) \right)}_{\vec{f}_\Gamma(\vec{x})} \cdot \vec{w} d\Omega$$

$$\vec{f}_\Gamma(\vec{x}) = \begin{cases} \rho_s (\underline{I}_s^{-1} \vec{\Gamma}_p) \wedge (\vec{x} - \vec{X}_i) si & \vec{x} \in \Omega_s \\ \vec{0} si & \vec{x} \notin \Omega_s \end{cases}$$

Résultats: Champ de force interparticulaire



Ajout de forces courte portée : intérêt

- Grande concentration (forces répulsives à courte portée)
- Forces de cohésion/ forces magnétiques
- Parois rigides (écoulements mésoscopiques)

Fin