GDR Interaction fluide-structure 14 mai 2007

Approches semi-analytiques pour les problèmes linéaires d'interaction onde de choc/coque élastique

Jean-François SIGRIST Cédric LEBLOND
Ingénieur R&D Doctorant CIFRE
Service Technique et Scientifique
DCN Propulsion



Contexte: dimensionnement au choc des sous-marins

■ Problème multiphysique complexe

- Milieu solide (coques, structures internes, fond marin)
- Milieu fluide (compressible et visqueux)
- Milieu gazeux (surface libre, cavitation, bulle d'explosion)
- > Sollicitation instationnaire (hautes et basses fréquences)

Approche industrielle actuelle

- Modèles très simplifiés au stade du pre-design
 - √ Géométries rigides
 - ✓ Ondes de choc planes
- Simulations numériques coûteuses pour les projets plus avancés (LS Dyna+USA)

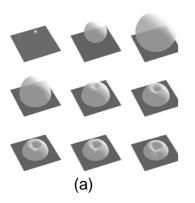


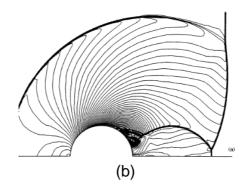
Choix de modélisation

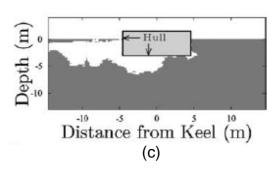
Construction de modèles intermédiaires

> Phénomènes mis de côté

- ✓ Couplage fort bulle d'explosion/coque
- ✓ Interactions visqueux/non-visqueux
- √ Cavitation induite par ondes radiées et réfléchies
- ✓ Grandes déformations, plasticité







- (a) Pearson A., Blake J.R., Otto, A.R., 2004. Jets in bubble, Journal of Engineering Mathematics, 48, p 391-412
- (b) Drikakis D., Ofengeim D., Timofeev E, Voionovich, P. 1997. Computation of non-stationary shock-wave/cylinder interaction using adaptive grid methods, *Journal of Fluids and Structures*, **11**, p 665-691
- (c) Sprague M.A., Geers T.L., 2006. A spectral element/finite element analysis of a ship-like structure subjected to an underwater explosion, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **195**, p 2149-2167



Choix de modélisation

Construction de modèles intermédiaires

Phénomènes abordés

- ✓ Interaction linéaire pression radiée par explosion sous-marine / coque élastique
- ✓ Limite : explosion relativement lointaine de la coque ou de faible puissance

> Type de méthode souhaitée

- √ Couplage fort
- √ Rapide et stable
- √ Sans approximation de type « early-time » ou DAA

> Buts

- √ Obtenir une compréhension des mécanismes de base
- ✓ Modèles d'interaction fluide-structure au stade du pre-design
- ✓ Fournir des éléments de comparaison pour les simulations plus lourdes



Choix de modélisation

Sollicitation imposée

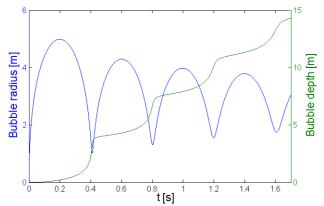
Onde de choc hydrodynamique sphérique (expérimental)

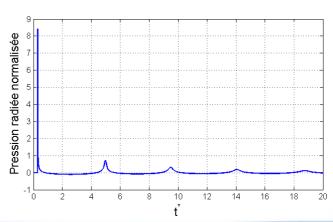
$$p_{inc}(r, \theta, t) = Cste \frac{\exp\left[-a(t - \tau(r, \theta))\right]}{R(r, \theta)} H(t - \tau(r, \theta))$$

> En développement, champ radié par la dynamique de la bulle

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{c}\right)R\ddot{R} + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{\dot{R}}{c}\right)\dot{R}^{2} = \left(1 + \frac{\dot{R}}{c} + \frac{R}{c}\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\dot{z}^{2}}{4} + \frac{P_{b} - P_{exp}}{\rho} + gz\right)$$

$$\ddot{z} + 3\frac{\dot{R}}{R}\dot{z} = 2g - C_{d}\frac{\dot{z}^{2}}{R}, \qquad P_{b} = P_{0}\left(\frac{R_{0}}{R}\right)^{3\gamma}$$







■ Mise en équations

> Anneau 2D circulaire élastique

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathcal{C}^2 \left[-\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial \theta} - k^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right) \right] = 0 \qquad \qquad \mathcal{C} = \frac{c_s}{c_f}, \quad k^2 = \frac{e^2}{12R^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mathcal{C}^2 \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} + w - k^2 \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \right) \right] = -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} p(\theta, t) \qquad \qquad \mathcal{M} = \frac{\rho_f}{\rho_s}, \quad \mathcal{E} = \frac{e}{R}$$

> Pour le fluide

✓ Equation d'onde
$$\nabla^2 p - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

✓ Linéarité : séparation des phénomènes

$$p = p_{inc} + p_{ref} + p_{rad}$$

$$\frac{\partial p_{ref}}{\partial r}\Big|_{r=1} = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{inc}|_{r=1}$$

$$\frac{\partial p_{rad}}{\partial r}\Big|_{r=1} = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

■ Méthode de résolution

- > Transformée de Laplace pour la dépendance temporelle
- > Transformée de Fourier pour la dépendance orthoradiale
- Séparation des variables



Solution

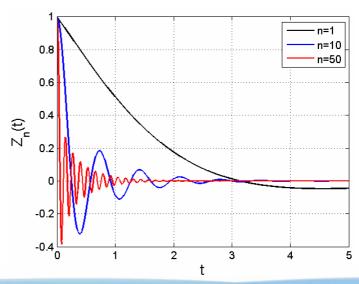
> Pression dans le domaine fluide

$$\hat{p}(r,\theta,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\hat{p}_{inc}^{n}(r,s) + \frac{K_n(rs)}{sK'_n(s)} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{inc}^{\mathbf{n}}(s) - \frac{K_n(rs)}{sK'_n(s)} s^2 \hat{w}_n(s) \right] \cos n\theta$$

> Remarque : pression à la paroi dans le domaine temporel

$$p(1, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[p_{inc}^{n}(1, t) - \int_{0}^{t} Z_{n}(t - \tau) \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{inc}^{n}(\tau) d\tau + \int_{0}^{t} Z_{n}(t - \tau) \ddot{w}_{n}(\tau) d\tau \right] \cos n\theta$$

$$Z_n(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{K_n(s)}{sK'_n(s)} \right\} (t)$$





Solution

> Injection de la pression à la paroi dans les équations de coque

$$\begin{bmatrix} s^2 + \mathcal{C}^2 n^2 (1 + k^2) & \mathcal{C}^2 n (1 + k^2 n^2) \\ \mathcal{C}^2 n (1 + k^2 n^2) & s^2 \left(1 - \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} \frac{K_n(s)}{s K_n'(s)} \right) + \mathcal{C}^2 (1 + k^2 n^4) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_n(s) \\ \hat{w}_n(s) \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{p}_{inc}^n(1, s) + \frac{K_n(s)}{s K_n'(s)} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{inc}^n(s) \end{pmatrix}$$

> Résolution pour chaque mode de Fourier

- ✓ Inversion matricielle (pour chaque point du vecteur s)
- ✓ Inversion numérique des transformées de Laplace

> Recomposition des modes de Fourier

> Remarques

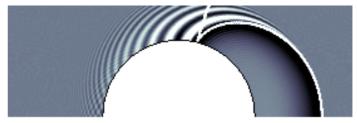
- ✓ Méthode de couplage fort
- ✓ Les modes de Fourier sont découplés
- ✓ Problème d'interaction résolu sans discrétisation du domaine fluide
- √ La pression dans le domaine fluide peut ensuite être calculée



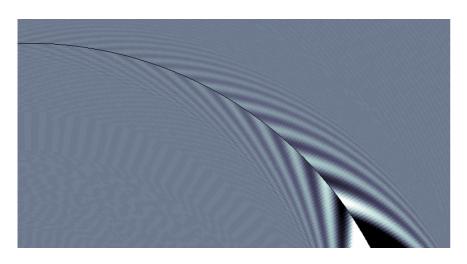
Validation qualitative pour un pulse demi-sinus



Expérimental⁽¹⁾, ombroscopie



Numérique, 150 modes, e/R = 0.04

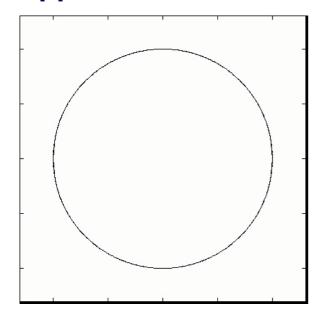


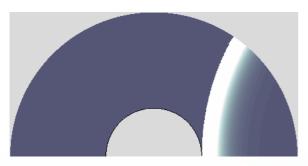
Pression radiée, fluide interne et externe

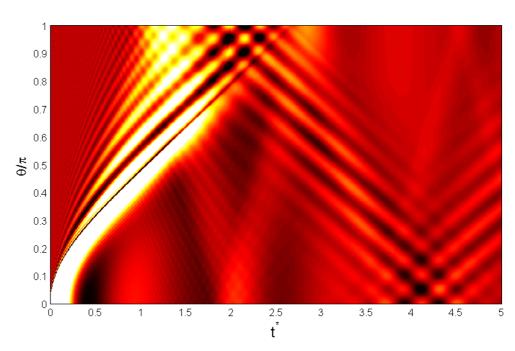
Génération de *head waves* par pseudo-ondes de Lamb (symétriques) et pseudo-ondes de Rayleigh (anti-symétriques)



Application au cas d'une onde de choc



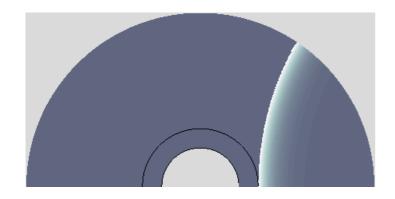


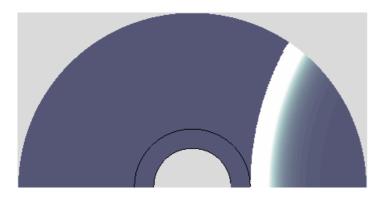


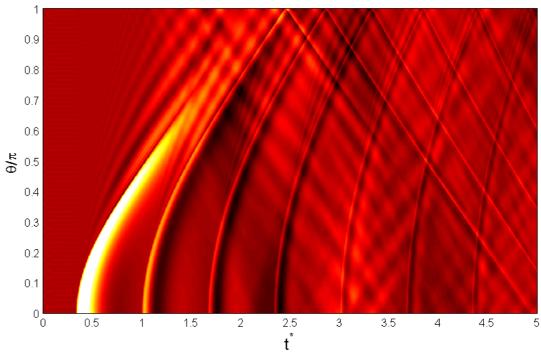
Pression à la paroi



■ Extension de la méthode pour 2 anneaux concentriques couplés par un fluide interne, en milieu fluide infini







Pression face externe, coque interne



Vers une modélisation plus réaliste de la géométrie

> Buts

- ✓ Calculer les déplacements et contraintes de coques 2D et 3D non cylindriques sous sollicitation hydrodynamique
- ✓ Evaluer les risques de résonances pulsations de bulle/fouettement

Particularités

- ✓ Les équations ne sont plus à variables séparables
- ✓ Les réponses impulsionnelles ne sont plus disponibles analytiquement (même dans le domaine de Laplace)

Envie de garder l'esprit de la première méthode

- √ Couplage fort
- ✓ Sans discrétisation du domaine fluide



Méthode

> Equations de coques élastiques (2D ou 3D)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial t^2} + \mathcal{C}^2 \left[\mathbf{L} \right] \mathbf{X} = -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} \mathbf{p}$$

> Décomposition sur la base des modes propres in-vacuo

$$\mathbf{X}(\mathbf{x},t) = \sum_{m} d_m(t) \mathbf{\Phi}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \qquad [L] \mathbf{\Phi}_{\mathbf{n}} = \lambda_n^2 \mathbf{\Phi}_{\mathbf{n}}$$

Projection des équations sur cette base

$$M_n \ddot{d}_n(t) + K_n d_n(t) = -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} f_n(t)$$

$$f_n(t) = \int_{\Gamma_{\mathbf{x}}} \mathbf{\Phi}_{\mathbf{n}}^T(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{p}_{inc}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{p}_{ref}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{p}_{rad}(\mathbf{x}, t)] d\Gamma_{\mathbf{x}}$$



Méthode

> Décomposition des pressions à la paroi

$$p_{ref}(\mathbf{x},t) = \sum_{n} p_{ref}^{n}(\mathbf{x},t), \quad \text{où} \quad p_{ref}^{n}(\mathbf{x},t) = p_{ref}^{n}(t)\Phi_{n}^{\zeta}(\mathbf{x}) \qquad \frac{\partial p_{ref}^{n}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{inc}(\mathbf{x},t)$$

$$p_{rad}(\mathbf{x},t) = \sum_{n} p_{rad}^{n}(\mathbf{x},t), \quad \text{où} \quad p_{rad}^{n}(\mathbf{x},t) = p_{rad}^{n}(t)\Phi_{n}^{\zeta}(\mathbf{x}) \qquad \frac{\partial p_{ref}^{n}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},t) = -\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{X}}(\mathbf{x},t)$$

> Solutions sous forme intégrale à la paroi

$$\frac{1}{2} p_{ref}^{n}(\mathbf{x}, t) = \int_{0}^{t} \int_{\Gamma_{\mathbf{x}'}} p_{ref}^{n}(\mathbf{x}', \tau) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - \tau) - \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}_{inc}(\mathbf{x}', \tau) \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - \tau) d\Gamma_{\mathbf{x}'} d\tau$$

$$\frac{1}{2} p_{rad}^{n}(\mathbf{x}, t) = \int_{0}^{t} \int_{\Gamma_{\mathbf{x}'}} p_{rad}^{n}(\mathbf{x}', \tau) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - \tau) + \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{X}}(\mathbf{x}', \tau) \mathcal{G}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - \tau) d\Gamma_{\mathbf{x}'} d\tau$$

> Où la fonction de Green est donnée par

$$\mathcal{G}(\mathbf{x},t) = \frac{H(t-|\mathbf{x}|)}{2\pi\sqrt{t^2-|\mathbf{x}|^2}}$$
 en 2D, $\mathcal{G}(\mathbf{x},t) = \frac{\delta(t-|\mathbf{x}|)}{4\pi|\mathbf{x}|}$ en 3D



Méthode

> Passage dans le domaine de Laplace

$$\frac{1}{2} \hat{p}_{ref}^{n}(\mathbf{x}, s) = \int_{\Gamma_{\mathbf{x}'}} \hat{p}_{ref}^{n}(\mathbf{x}', s) \frac{\partial \hat{\mathcal{G}}}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', s) - \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{inc}(\mathbf{x}', s) \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', s) d\Gamma_{\mathbf{x}'}$$

$$\frac{1}{2} \hat{p}_{rad}^{n}(\mathbf{x}, s) = \int_{\Gamma_{\mathbf{x}'}} \hat{p}_{rad}^{n}(\mathbf{x}', s) \frac{\partial \hat{\mathcal{G}}}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', s) + s^{2}\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{X}}(\mathbf{x}', s) \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', s) d\Gamma_{\mathbf{x}'}$$

Où la transformée de la fonction de Green est

$$\hat{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, s) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(is|\mathbf{x}|) \quad \text{en 2D}, \qquad \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{x}, s) = \frac{e^{-|\mathbf{x}|s}}{4\pi |\mathbf{x}|} \quad \text{en 3D}$$

ightharpoonup Décomposition de la vitesse incidente et déplacement, multiplication par $\Phi_n^{\zeta}(\mathbf{x})$ et intégration selon x

$$\hat{p}_{ref}^{n}(s) = -\sum_{m} \hat{Z}_{n,m}(s) \, \hat{v}_{inc}^{m}(s)
\hat{p}_{rad}^{n}(s) = \sum_{m} \hat{Z}_{n,m}(s) \, s^{2} \hat{d}_{m}(s)$$

$$\hat{Z}_{n,m}(s) = \frac{\hat{S}_{n,m}(s)}{N_{n}/2 + \hat{D}_{n}(s)}$$



Méthode

 \triangleright Où les fonctions $D_n(s)$ et $S_{n,m}(s)$ sont données par

$$D_n(s) = \int_{\Gamma_{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_{\mathbf{x}'}} \Phi_n^{\zeta}(\mathbf{x}) \Phi_n^{\zeta}(\mathbf{x}') \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', s) d\Gamma_{\mathbf{x}'} d\Gamma_{\mathbf{x}}, \quad S_{n,m}(s) = \int_{\Gamma_{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma_{\mathbf{x}'}} \Phi_n^{\zeta}(\mathbf{x}) \Phi_m^{\zeta}(\mathbf{x}') \frac{\partial \hat{\mathcal{G}}}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', s) d\Gamma_{\mathbf{x}'} d\Gamma_{\mathbf{x}}$$

> Pour éviter le calcul direct des doubles intégrales surfaciques

✓ On considère n-ième mode sollicité par l'impulsion du m-ième mode

$$\hat{p}_n(\mathbf{x}, s) = \hat{Z}_{n,m}(s) \, \Phi_n^{\zeta}(\mathbf{x}), \quad \text{tel que} \quad \frac{\partial \hat{p}_n}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, s) = -\Phi_m^{\zeta}(\mathbf{x})$$

√ Solution sous forme intégrale

$$\frac{1}{2}\,\hat{p}_n(\mathbf{x},s) = \int_{\Gamma_{\mathbf{x}'}} \frac{\partial \hat{\mathcal{G}}}{\partial \mathbf{n}'}(\mathbf{x} - \mathbf{x}',s)\,\hat{p}_n(\mathbf{x}',s)\,\mathrm{d}\Gamma_{\mathbf{x}'} + \int_{\Gamma_{\mathbf{x}'}} \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}',s)\,\Phi_m^{\zeta}(\mathbf{x}')\,\mathrm{d}\Gamma_{\mathbf{x}'}$$

✓ Discrétisation des intégrales par BEM et assemblage

$$\frac{1}{2} \left\{ \hat{p}_n(\mathbf{x}, s) \right\} = \left[D(\mathbf{x}, s) \right] \left\{ \hat{p}_n(\mathbf{x}, s) \right\} + \left[S(\mathbf{x}, s) \right] \left\{ \Phi_m^{\zeta}(\mathbf{x}) \right\}$$

✓ Inversion matricielle, multiplication par $\{\Phi_n^{\zeta}(\mathbf{x})\}$ et intégration selon x

$$\hat{Z}_{n,m}(s) = \frac{1}{N_n} \int_{\Gamma_n} \left\{ \Phi_n^{\zeta}(\mathbf{x}) \right\} \left[1/2 - D(\mathbf{x}, s) \right]^{-1} \left[S(\mathbf{x}, s) \right] \left\{ \Phi_m^{\zeta}(\mathbf{x}) \right\} d\Gamma_{\mathbf{x}}$$



Méthode

> Injection des efforts modaux dans les équations modales

$$M_n s^2 \hat{d}_n(s) + K_n \hat{d}_n(s) = -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} M_n \left(p_{inc}^n(s) - \sum_m \hat{Z}_{n,m}(s) \, \hat{v}_{inc}^n(s) + \sum_m \hat{Z}_{n,m}(s) \, s^2 \hat{d}_m(s) \right)$$

> Troncature sur le nombre de modes, forme matricielle

$$\left[\hat{\mathcal{X}}_{n,m}(s)\right] \left\{ \hat{d}_n(s) \right\} = -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} \left\{ M_n \hat{p}_{inc}^n(s) \right\} + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} \left[M_n \hat{Z}_{n,m}(s) \right] \left\{ \hat{v}_{inc}^n(s) \right\}$$

> Inversion matricielle, pour chaque point du vecteur s

$$\left\{\hat{d}_n(s)\right\} = -\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} \left[\hat{\mathcal{X}}_{n,m}(s)\right]^{-1} \left\{M_n \hat{p}_{inc}^n(s)\right\} + \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{E}} \left[\hat{\mathcal{X}}_{n,m}(s)\right]^{-1} \left[M_n \hat{Z}_{n,m}(s)\right] \left\{\hat{v}_{inc}^n(s)\right\}$$

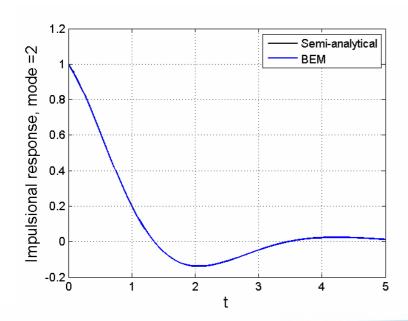
Inversion de Laplace et recomposition modale

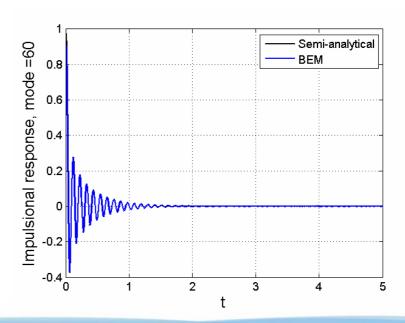
$$\mathbf{X}(\mathbf{x},t) = \sum_{m=0}^{N} \left\{ d_n(t) \right\}_m \mathbf{\Phi}_{\mathbf{m}}(\mathbf{x})$$



En développement

- > Validation intermédiaire de la méthode à l'aide des réponses impulsionnelles obtenues dans le cas de l'anneau circulaire
 - ✓ BEM avec 1000 éléments
 - ✓ Quantités linéaires par élément
 - ✓ Intégrales des fonctions de Green sur un élément par Gauss 4 points







Merci de votre attention

