

# Application de la décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) aux domaines mobiles

LIBERGE Erwan, Mustapha Benaouicha, Aziz Hamdouni

EIGSI

LEPTAB - Université de La Rochelle

Réunion thématique GDR d'Interaction fluide structure

Traitement numérique des interfaces

14-15 Mai 2007

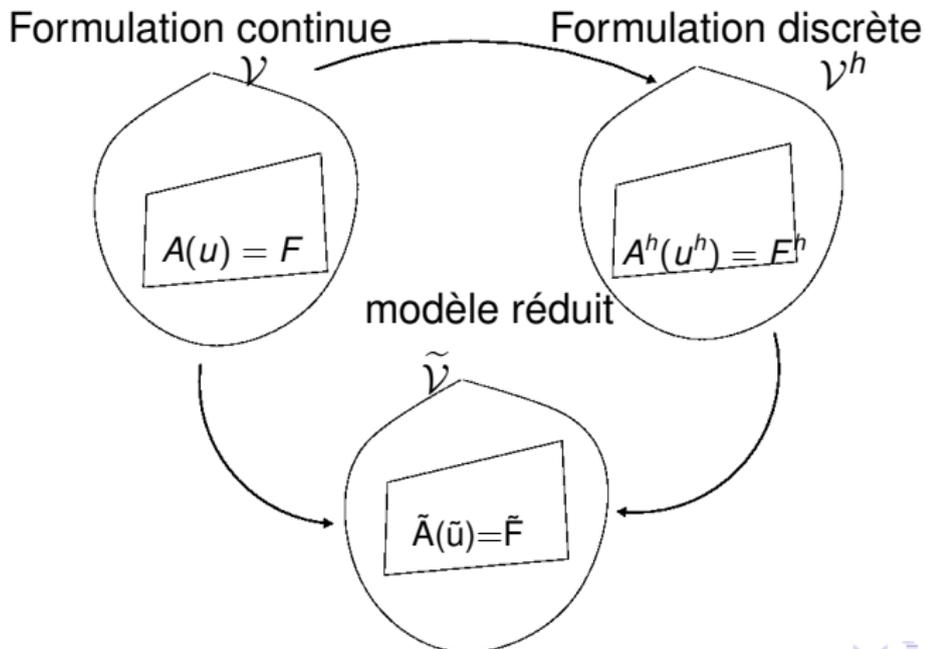
# Contexte

## Contrôle actif en Interaction Fluide Structure

### Méthode de résolution

- Couplage d'un solveur fluide et d'un solveur structure  
⇒ souvent des pas de temps différents
- maillage coûteux (raffinement aux interfaces)  
et qui doit être modifié à chaque pas de temps solide  
⇒ **Non adapté pour du contrôle actif**

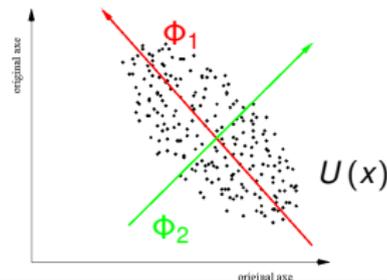
# systèmes dynamiques d'ordre bas



# La décomposition orthogonale aux valeurs propres

Donne une base qui est optimale au sens énergétique

A l'origine : Une méthode statistique appelée *Analyse en composantes principales*



## En mécanique

- Introduite en mécanique des fluides par *Lumley (1967)*  
→ identification des structures cohérentes
- Essor fin des années 80  
nombreuses applications : canal, cavité entraînée, disque contra-rotatif, couche de mélange, jet ...  
(*Sirovich et al., Cazemier ...*)

La POD consiste à rechercher une fonction déterministe  $\phi$ , dans un espace de Hilbert  $H$ , représentant de manière optimale un champ de vitesse  $u(x, t)$

$$\begin{cases} \max_{\Phi \in H} \langle (u, \Phi)^2 \rangle \\ (\Phi, \Phi) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$(\bullet, \bullet)$  : produit scalaire de  $H$

$\langle \bullet \rangle$  : opérateur de moyenne statistique.

Dans le cas où  $H = L^2(\Omega)$

problème aux valeurs propres

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}(x, y) \phi(y) = \lambda \phi(x)$$

$\mathcal{R}(x, y) = \langle u(x, t) \otimes u(y, t) \rangle$  : tenseur de corrélation spatial

# Snapshot POD (Sirovitch, 1987)

## Snapshot POD

$M$  : Nombre de snapshots

$N_m$  nombre de noeuds

$n_c$  nombre de composantes

si  $M \ll N_m n_c$  On recherche les  $a_k$  tels que :

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^M A^k u(x, t_k)$$

Ce qui conduit au problème aux valeurs propres suivant

$$\sum_{k=1}^M \frac{1}{M} (u(t_i), u(t_k)) A^k = \lambda A^i \text{ pour } i = 1 \dots M$$

# Propriétés de modes POD

## Propriétés

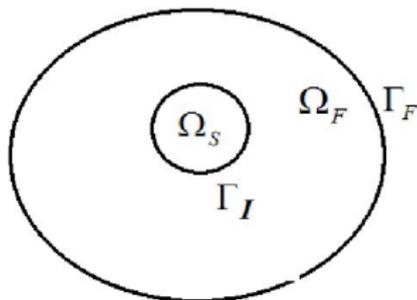
- $\lambda_n \in \mathbb{R}^+ \quad \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n-1} > \lambda_n > 0$
- $(\phi_n, \phi_m) = \delta_{nm}$ ,  $\phi_n$  respecte les conditions aux limites et  $\text{div}(\phi_n) = 0$
- $u(x, t)$  peut s'écrire :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) \phi_n(x) \text{ au sens de } L^2(\Omega)$$

$$a_n(t) = (u(\bullet, t), \phi_n)$$

- Energie :  $E_N = \sum_{n=1}^N \langle a_n(t) a_n(t) \rangle = \sum_{n=1}^N \lambda_n$

# Application à l'interaction fluide structure



- $u_{\Gamma_I} = V_{\Gamma_I}$
- $\mathcal{F}_F = \sigma_F \cdot n$

où  $n$  est la normale extérieure au domaine solide

## Problème

- Caractéristiques spatiales des modes POD alors que les domaines sont mobiles
- Comment les calculer ?

# Application à l'interaction fluide structure

## Exemple

Calcul de la matrice Snapshot

$$\mathbf{C} = [c_{ij}]$$

$$c_{ij} = \frac{1}{M} (u(t_i, \bullet), u(t_j, \bullet))$$

Comment définir le produit scalaire  $(\bullet, \bullet)$  ?

Les domaines sont différents à l'instant  $t_i$  et  $t_j$

## Solution proposée

### Solution

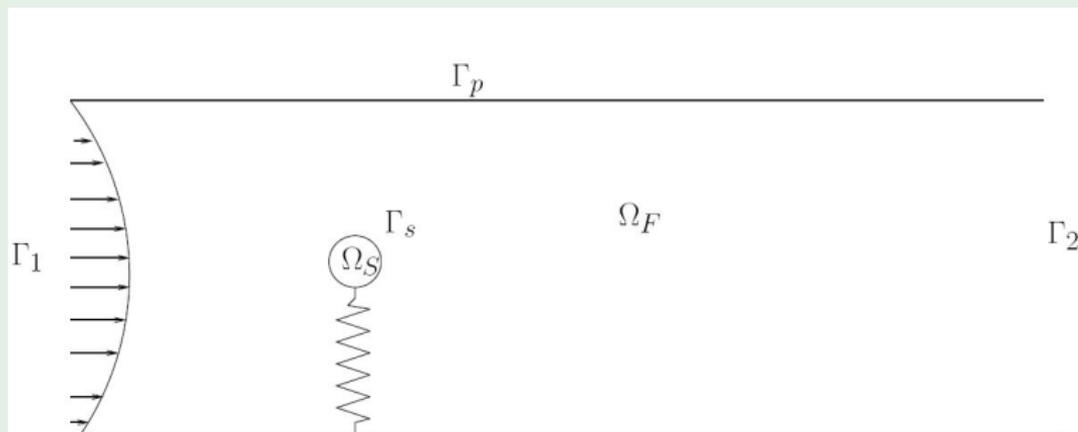
- Utiliser un domaine de référence fixe au cours du temps contenant toutes les configurations mobiles
- A chaque snapshot : interpoler le champ de vitesse du maillage mobile vers le maillage fixe  
     $\implies$  Champ de vitesse globale (fluide + solide)
- Rechercher les modes POD pour ce champ de vitesse sur ce maillage
- Les domaines sont connus par des fonctions caractéristiques :

$$\mathbb{I}_{\Omega_j}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega_j(t) \\ 0 & \text{if } x \notin \Omega_j(t) \end{cases}$$

# Interpolation sur le maillage de référence

## Application

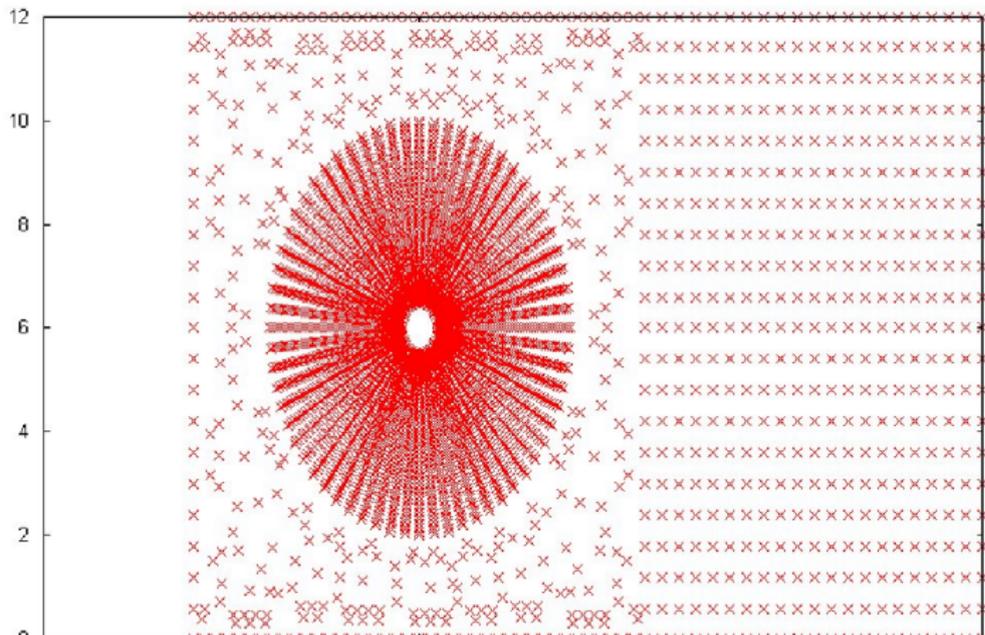
On considère le problème 2D d'un solide rigide immergé dans un fluide incompressible



Fluide incompressible de  $\text{Re}$  Reynolds 200. La simulation a été effectuée sous Castem

# Interpolation sur le maillage de référence

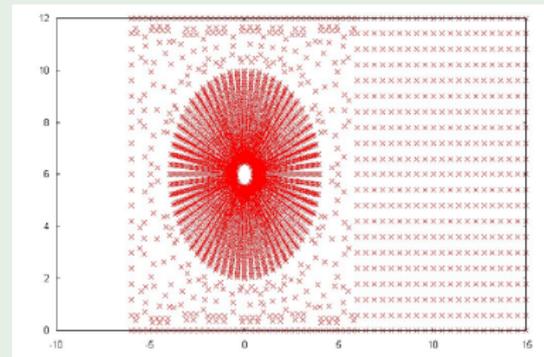
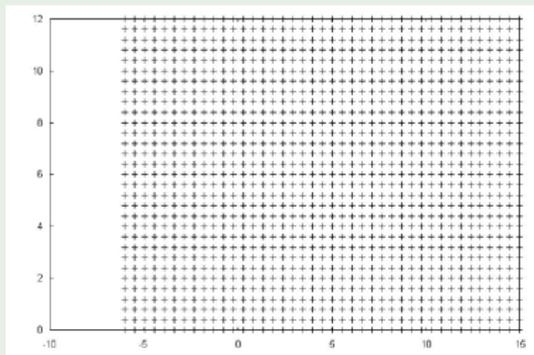
## Application



# Interpolation sur le maillage de référence

## Application

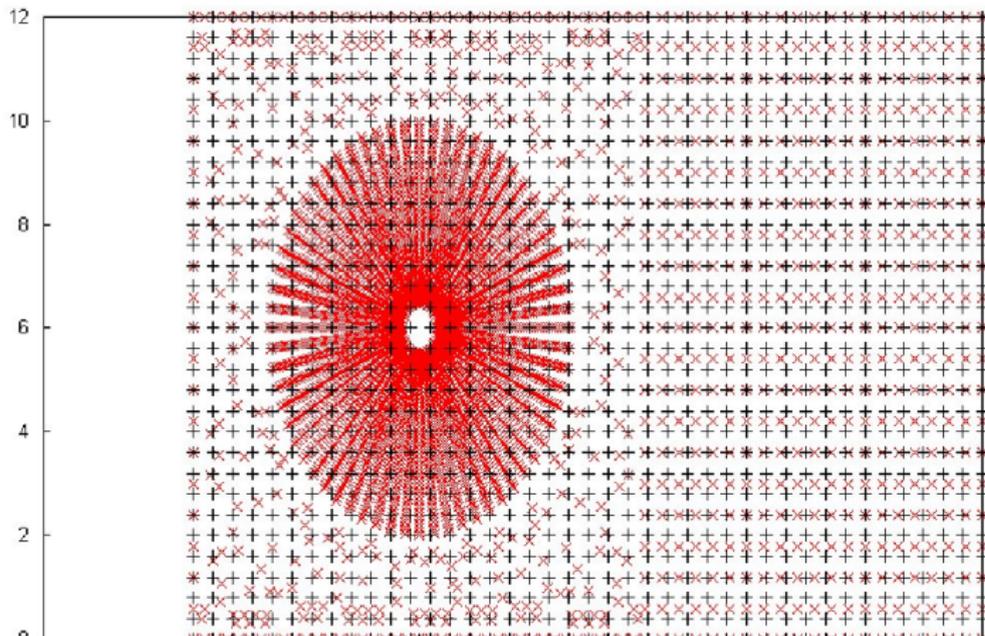
**Noeuds composants le maillage initial**



**Discretisation du domaine de référence**

# Interpolation sur le maillage de référence

## Application

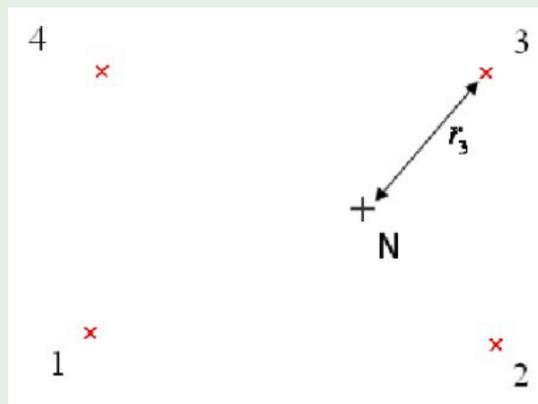


# Interpolation sur le maillage de référence

## Application

**Le noeud  $N$   $\in$  au maillage de référence**

$r_i$  : distance entre le noeud  $i$  du maillage mobile et le noeud  $N$



**Interpolation inverse (Shepard method, 1968)**

$$U_N = \frac{\frac{U_1}{r_1} + \frac{U_2}{r_2} + \frac{U_3}{r_3} + \frac{U_4}{r_4}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}}$$

# Test de la base POD

## Contribution énergétique

**Efficacité de la base POD à retranscrire le phénomène testé sur le champ de vitesse total interpolé (sur  $\Omega = \Omega_F(t) \cup \Omega_S(t)$ )  
Avec 12 modes on capture 99.999% de l'énergie totale**

mode $i$	eigenvalue $\lambda_i$	% energy
1	$5.288 \cdot 10^{-6}$	98.370
2	$5.218 \cdot 10^{-8}$	99.3410
3	$3.032 \cdot 10^{-8}$	99.905
4	$2.212 \cdot 10^{-9}$	99.946
5	$1.822 \cdot 10^{-9}$	99.980

**Contribution énergétique des 5 premiers modes**

# Test de la base POD

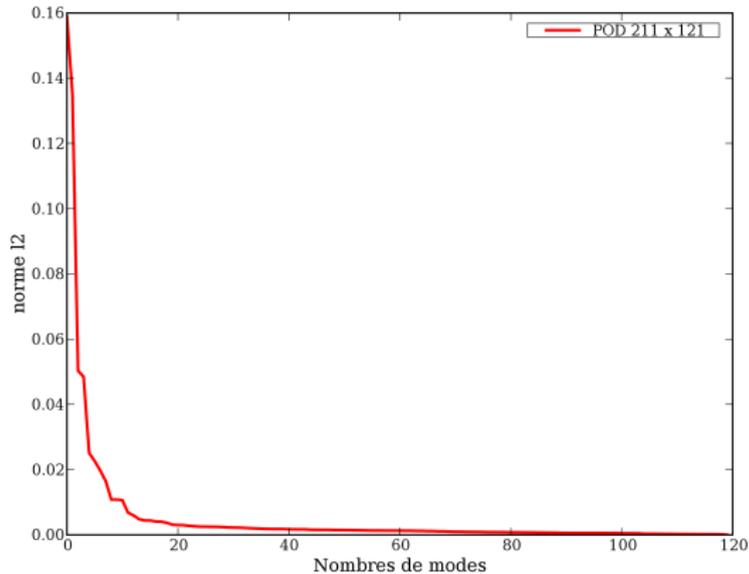
## Contribution énergétique

**La reconstruction du champ de vitesse sur la base POD tronquée à  $N_{modes}$  modes est évaluée en norme L2**

$$a_n(t) = (u(\bullet, t), \Phi_n)$$

$$U_{N_{modes}}(x, t) = \sum_{n=1}^{N_{modes}} a_n(t) \Phi_n(x)$$

$$Res(N_{modes}) = \frac{\|U - U_{N_{modes}}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}}{\|U\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}} \quad (2)$$



Erreur de reconstruction inférieure à 1% à partir de 12 modes

# Objectif

## Construction d'un système dynamique dans le cas d'un solide rigide

### Contrainte

- Obtenir un système d'EDO
- Maillage fixe et fonction caractéristique

Solution : utiliser des méthodes type domaines fictifs

# Objectif

## Méthode des domaines fictifs

Principe : étendre les équations de Navier-Stokes au domaine solide rigide afin d'utiliser une formulation variationnelle globale sur  $\Omega = \Omega_S(t) \cup \Omega_F(t)$

**Contrainte solide rigide** :  $\forall x \in \Omega_S \quad \mathbf{D}[u] = 0$

- $\mu_s$  : facteur de pénalisation de la contrainte de solide rigide
- Multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  associé à cette contrainte dans la formulation variationnelle

(Glowinski,1999), (Laure,2005)

## Formulation variationnelle

$u$  à  $\operatorname{div} u = 0$  et :

Pour tout  $\Phi$  un champ de vitesse virtuel  $\operatorname{div} \Phi = 0$  :

$$\int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - g \right) \Phi dx + \int_{\Omega} 2\mu \operatorname{tr}(\mathbf{D}(u) \mathbf{D}(\Phi)) dx + \int_{\partial\Omega_F \setminus \partial\Omega_S} p\Phi \cdot ndx + \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_S} \operatorname{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi)) dx = 0$$

$$\mathbf{D}(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + {}^t\nabla u)$$

$$\rho = \mathbb{I}_{\Omega_F} \rho_f + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_F}) \rho_s ; \mu = \mathbb{I}_{\Omega_F} \mu_f + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_F}) \mu_s$$

La pression disparaît à cause de  $\operatorname{div} \Phi = 0$  et le principe d'action-réaction entre le solide et le fluide,  $\int_{\partial\Omega_F \setminus \partial\Omega_S} p\Phi \cdot ndx$  étant traité par pénalisation.

# Système dynamique POD

$$u = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \quad \sum_{i=1}^N \lambda_i \geq 99.99\% \text{ de l'énergie totale}$$

Pour  $n = 1..N$  :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{da_i}{dt} A_{in} + \sum_{i=1}^N a_i B_{in} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j C_{ijn} = E_i \\ \frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_f}}{\partial t} + u \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_f} = 0 \end{cases}$$

avec

$$A_{in} = \int_{\Omega} \rho \Phi_i \Phi_n dx$$

$$B_{in} = \int_{\Omega} 2\mu \operatorname{Tr}(\mathbf{D}(\Phi_i) \mathbf{D}(\Phi_n)) dx - \int_{\Gamma_s} 2(\mu_s - \mu_f) (\mathbf{D}[\Phi_i] \Phi_n) \cdot n dx$$

$$C_{ijn} = \int_{\Omega} \rho \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \Phi_n dx \quad E_i = - \int_{\Omega_s} \operatorname{Tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi_n)) dx$$

## Application sur un cas monodimensionnel

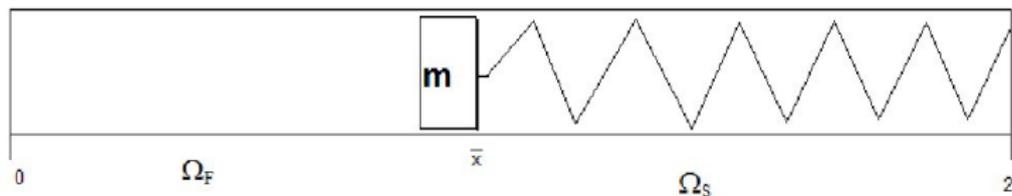


FIG.: Description du domaine d'étude

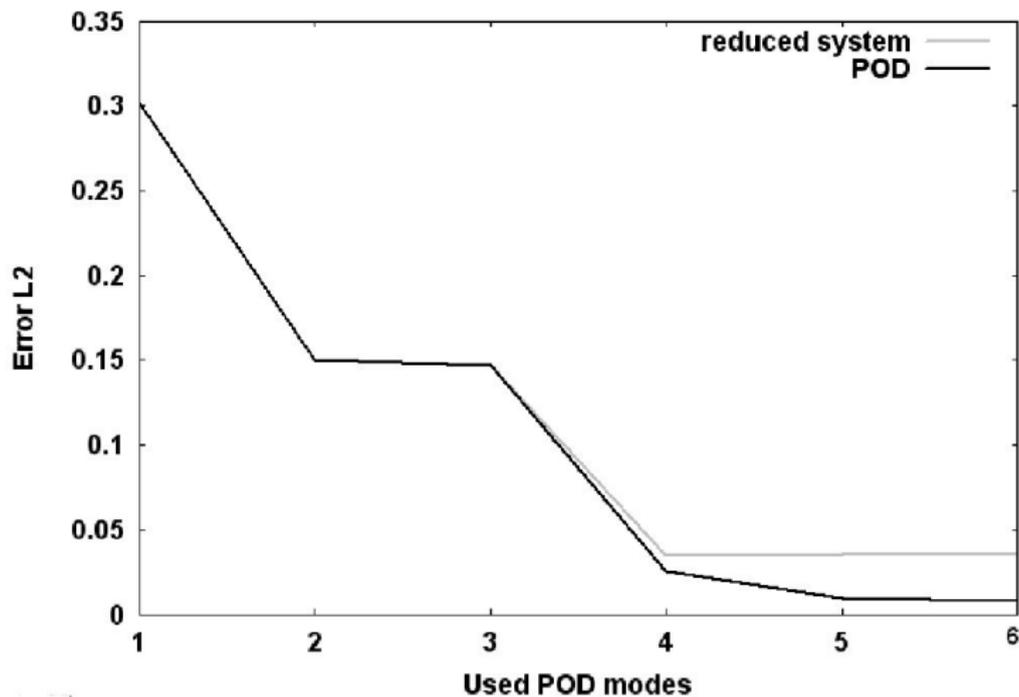
Le fluide est modélisée par l'équation de Burgers couplée avec un ressort

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \nu \Delta u$$

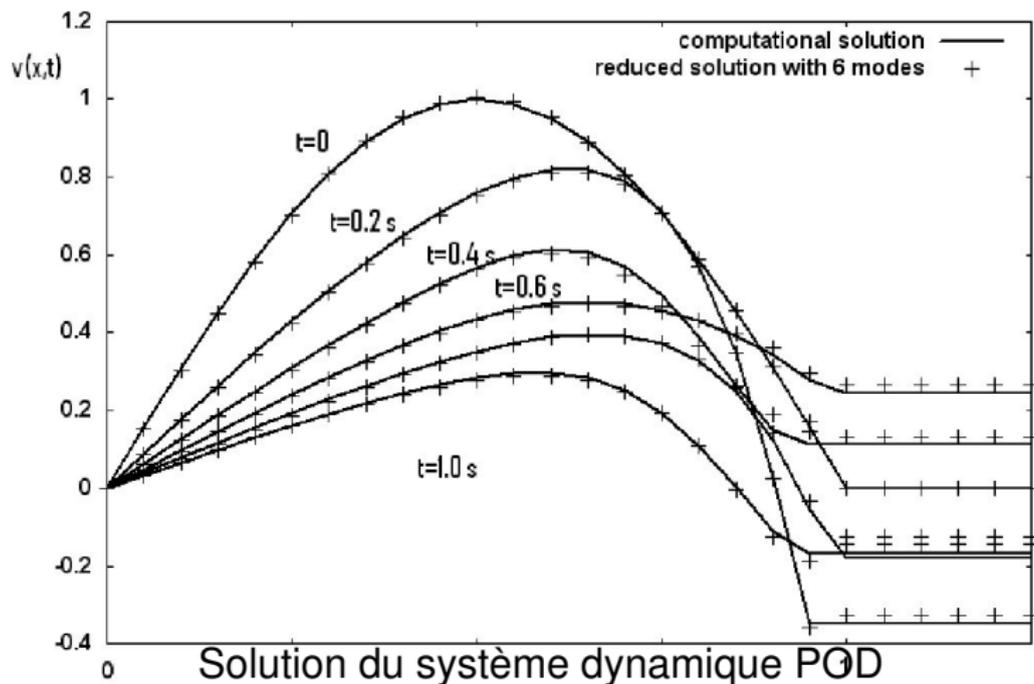
## Contribution énergétique des modes PODs

mode $i$	énergie $\lambda_i$	% énergie
1	18.255	91.648
2	1.515	99.256
3	$8.393 \cdot 10^{-2}$	99.677
4	$6.079 \cdot 10^{-2}$	99.982
5	$2.347 \cdot 10^{-3}$	99.994
6	$7.804 \cdot 10^{-4}$	99.999

Contribution énergétique des modes



Erreur de reconstruction en norme  $L^2$  en fonction du nombre de modes conservés



$$\text{POD} : a_1 = (u(\bullet, t), \Phi_1)$$

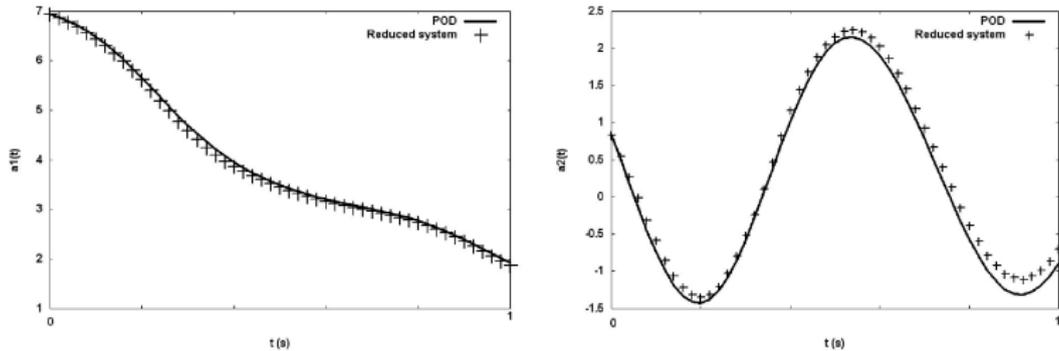


FIG.: Coefficients temporels  $a_1, a_2$

$$\text{POD} : a_1 = (u(\bullet, t), \Phi_1)$$

# Application sur un cas bidimensionnel

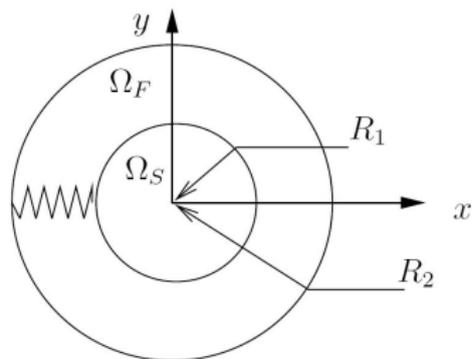
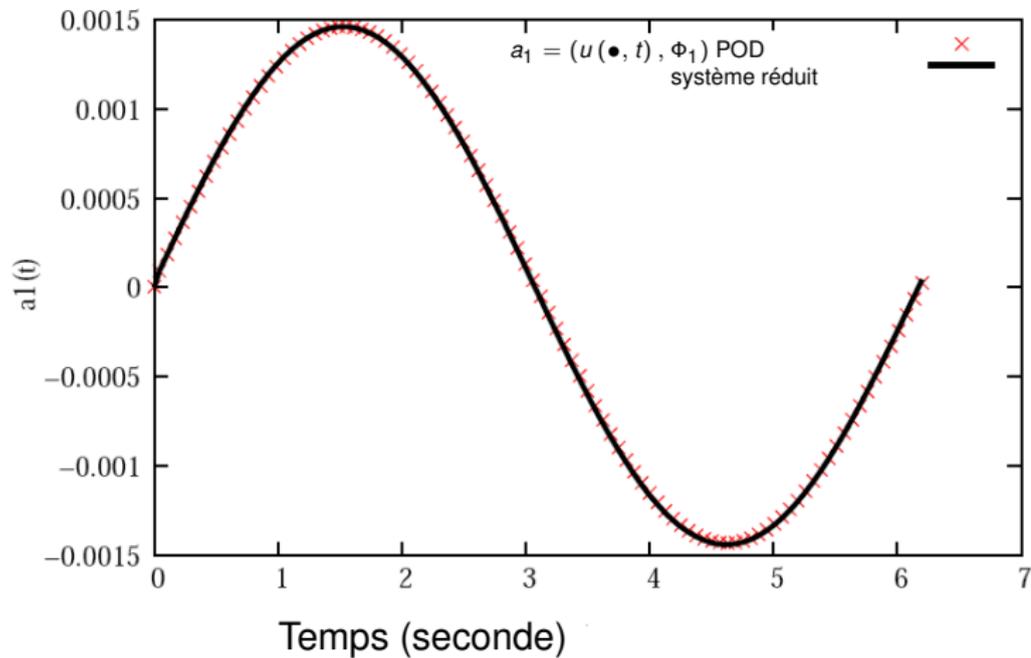
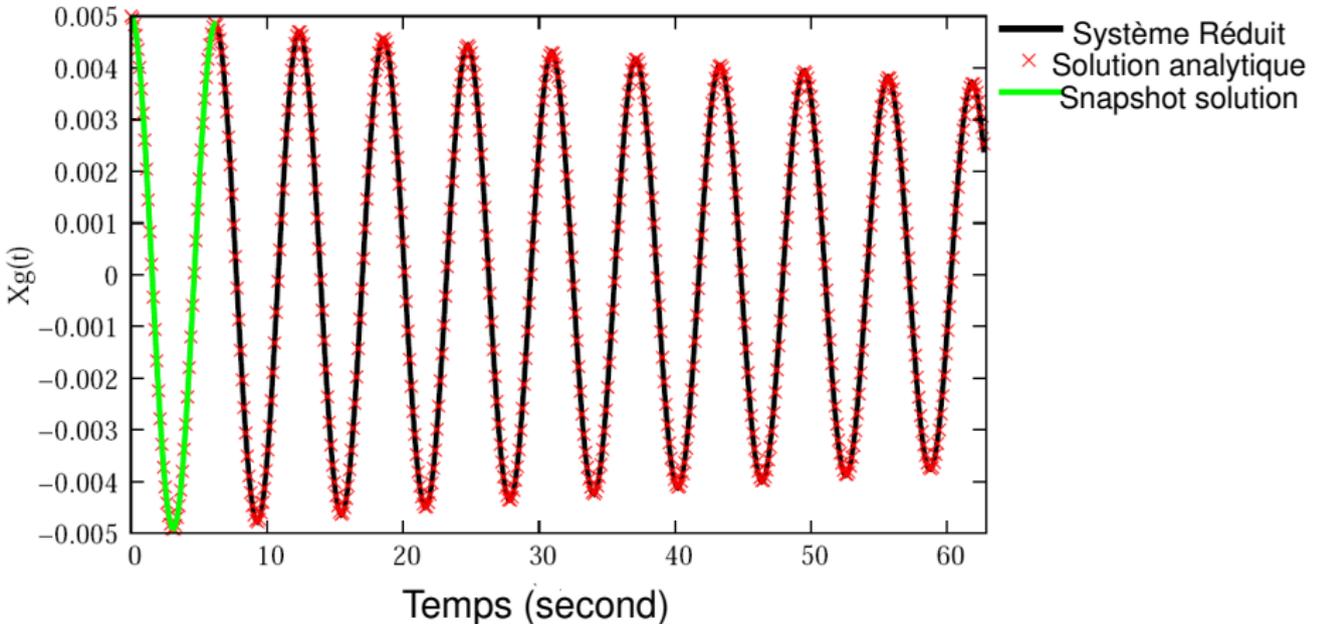


FIG.: Description du domaine d'étude



## Déplacement du centre de gravité du solide



# Conclusion

## Conclusion

- La POD a été appliquée aux cas d'interaction fluide-solide rigide avec de bons résultats
- Introduction d'un domaine de référence
- Utilisation des méthodes types domaines fictifs pour l'obtention d'un système dynamique d'ordre bas

## Perspectives

- application 3D
- Ecoulement fluide turbulent
- base a priori (Ryckelink, Verdon)