[Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Série 2, Mécanique-physique, Chimie, Sciences de l'univers, [...]

MÉCANIQUE DES SOLIDES ÉLASTIQUES. — *Principes variationnels symétriques couplés de type primal-dual en élastodynamique linéaire.* Note (*) de **Roger Ohayon** et **Roger Valid,** présentée par Georges Duvaut.

On présente une formulation variationnelle couplée symétrique primale-duale en élastodynamique en introduisant un champ auxiliaire inconnu. On obtient des concepts généralisés de masse ajoutée. On retrouve en particulier le cas de l'interaction fluide-structure en milieu borné.

MECHANICS OF ELASTIC SOLIDS. — Symmetric Primal-Dual Coupled Variational Principles in Linear Elastodynamic.

Symmetric primal-dual coupled variational formulations are presented by using an auxiliary field variable in the region where the dual-stress variable is chosen. Fluid-structure interaction is presented as a particular case.

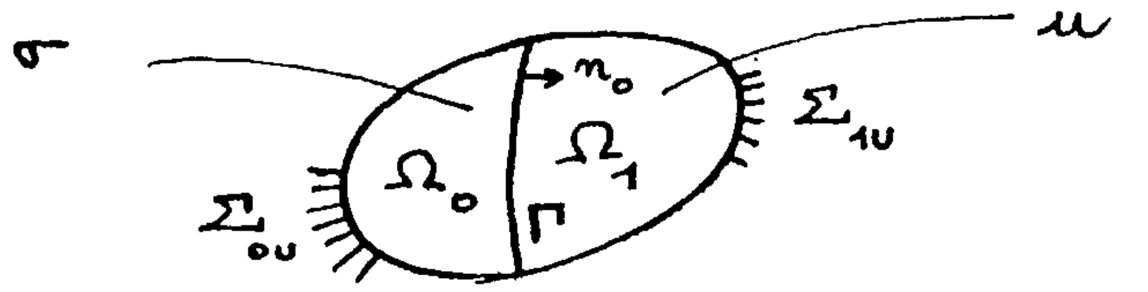
INTRODUCTION. — Le problème du calcul précis des contraintes en mécanique est souvent mal résolu par application de formulations variationnelles de type primal, c'est-à-dire où le champ inconnu est le champ de déplacement. On peut alors recourir à des formulations de type complémentaire ([1], [2]) ou mixtes [2] appliquées dans une région localisée de la structure, la formulation primale restant appliquée dans le domaine complémentaire.

Si le couplage de ces formulations est aisé en élastostatique, il n'en est pas de même pour le couplage du principe primal et du principe dual complémentaire [3] en élastodynamique, principe dans lequel les rôles des énergies potentielles et cinétiques sont inversés.

Le couplage direct conduit à une formulation *non symétrique* qui ne relève pas de formulations énergétiques traduisant un comportement de système conservatif. De plus, après discrétisation par éléments finis, on obtient un système matriciel non symétrique impliquant des algorithmes spécifiques coûteux.

Nous proposons une méthode de couplage conduisant à une formulation variationnelle couplée *symétrique* en introduisant un champ inconnu auxiliaire déjà utilisé pour des problèmes de vibrations en élasticité [4] et en interaction fluide-structure ([4], [5], [8]). Après avoir présenté le cas de l'élasticité linéaire tridimensionnelle et discuté, pour des sollicitations extérieures particulières, des opérateurs dits de masse ajoutée, on analysera, comme cas particulier, celui de *l'interaction fluide-structure en milieu borné.*

1. NOTATIONS. HYPOTHÈSES. ESPACES ADMISSIBLES. — La structure occupe un domaine borné Ω constitué de deux sous-domaines Ω_0 et Ω_1 ($\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$, $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$) séparés par Γ. Elle est encastrée sur $\Sigma_{0\,U}$ et $\Sigma_{1\,U}$. Elle est soumise à des forces volumiques f_0 et f_1 dans Ω_0 et Ω_1 ainsi qu'à des forces surfaciques F_0 et F_1 sur $\Sigma_{0\,F}$ et $\Sigma_{1\,F}$. n_0 est la normale à Γ extérieure à Ω_0.



On se place dans le cadre de l'élasticité linéaire et on s'intéresse aux petits mouvements à partir d'un état d'équilibre naturel. $\rho(M) > 0$ est la masse volumique du corps à l'équilibre. $u(M, t)$ désigne le champ de déplacement (variable primale dans Ω_1). Le tenseur des contraintes $\sigma(M, t)$ [variable duale dans Ω_0 est relié au tenseur des déformations $D(M, t)$ au travers de l'opérateur linéaire de l'élasticité A ou de son inverse B]. A possède les propriétés usuelles de symétrie et d'ellipticité.

La barre désigne la transposition dans $\mathbb{R}^3$ et Tr est le symbole Trace [2]. On utilisera une notation classique pour les problèmes d'évolution [6] :

$$\varphi(t)=\text{fonction } M\mapsto\varphi(M,t),\qquad \varphi'(t)=\frac{\partial\varphi(t)}{\partial t},\qquad \varphi''(t)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

On introduit les espaces fonctionnels suivants :

(1) $$U=\{u\,|\,u\in(H^1(\Omega_1))^3,\ u=0\,|_{\Sigma_{1\,U}}\},$$

(2) $$X=\{\sigma \text{ symétriques}/\sigma\in(H(\mathrm{Div},\Omega_0))^6\},$$

X est muni du produit scalaire [6] :

(3) $$(\sigma_1,\sigma_2)=\int_{\Omega_0}\left[\frac{\mathrm{div}\,\sigma_1\,\overline{\mathrm{div}\,\sigma_2}}{\rho}+\mathrm{Tr}(B\,\sigma_1.\sigma_2)\right]dx,$$

(4) $$S=\{\sigma\in X\,|\,\mathrm{div}\,\sigma=0\,|_{\Omega_0},\ \sigma n=0\,|_{\Sigma_{0\,F}}\},$$

(5) $$S_0=S^{\perp}=\{\sigma\in X\,|\,\sigma n=0\,|_{\Sigma_{0\,F}},\ \forall\,\delta\sigma\in S:(\sigma,\delta\sigma)=0\},$$

(6) $$S_{F_0}=\{\sigma\in X,\ \sigma n=F_0\,|_{\Sigma_{0\,F}},\ \forall\,\delta\sigma\in S:(\sigma,\delta\sigma)=0\}.$$

S_0 est l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles homogènes dans Ω_0. (H(Div, Ω) est l'espace classique des formulations complémentaires [6]).

2. Formulation couplée non symétrique en (u, σ). — En utilisant le principe d'Hellinger-Reissner modifié [2] en élastodynamique dans Ω_0 et en tenant compte de l'équation d'équilibre dynamique pour éliminer la variable déplacement dans Ω_0, on trouve le résultat suivant :

Trouver $(u,\sigma)\in U\times S_{F_0}$ tel que :

(7) $$\left\{\begin{aligned}&\int_{\Omega_1}\rho u''.\delta u\,dx+\int_{\Omega_1}\mathrm{Tr}(A\,D(u).D(\delta u))\,dx+\int_{\Gamma}\sigma n_0.\delta u\,ds\\&\qquad\qquad=\int_{\Omega_1}f_1.\delta u\,dx+\int_{\Sigma_{1\,F}}F_1.\delta u\,ds,\\&\int_{\Omega_0}\mathrm{Tr}(B\,\sigma''.\delta\sigma)\,dx+\int_{\Omega_0}\frac{\mathrm{div}\,\sigma.\overline{\mathrm{div}\,\delta\sigma}}{\rho}dx-\int_{\Gamma}u''.\delta\sigma\,n_0\,ds=-\int_{\Omega_0}\frac{f_0}{\rho}.\mathrm{div}\,\delta\sigma\,dx,\\&\qquad\qquad\forall(\delta u,\delta\sigma)\in U\times S_0,\end{aligned}\right.$$

avec des conditions initiales sur $u(0)$, $u'(0)$; $\sigma(0)$, $\sigma'(0)$.

Les formes bilinéaires de couplage ne sont pas symétriques l'une de l'autre :

$$\left(\int_{\Gamma}\sigma n_0.\delta u\,ds \text{ et } \int_{\Gamma}u''.\delta\sigma\,n_0\,ds\right).$$

3. Formulation couplée symétrique. Introduction du champ auxiliaire σ^* dans Ω_0. — 3.1. *Cas général.* — On introduit un champ auxiliaire σ^* relié à σ par :

(8) $$\sigma(t)=-\sigma^{*\prime\prime}.$$

La liaison de type Dirichlet (dans notre cas) $\sigma n_0=F_0\,|_{\Sigma_{0\,F}}$ devient $\sigma^{*\prime\prime}n_0=-F_0\,|_{\Sigma_{0\,F}}$, soit $\sigma^* n_0=-\Phi_0\,|_{\Sigma_{0\,F}}$. En introduisant l'espace admissible S_{Φ_0} [analogue à S_{F_0} (6)] on démontre le résultat suivant :

Trouver $(u, \sigma^*, \sigma) \in U \times S_{\Phi_0} \times (L^2(\Omega_0))^6$ tel que :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} \rho u''.\delta u\,dx - \int_{\Gamma} \sigma^{*\prime\prime} n_0.\delta u\,ds + \int_{\Omega_1} \mathrm{Tr}(\mathrm{AD}(u).\mathrm{D}(\delta u))\,dx \\
&\qquad\qquad = \int_{\Omega_1} f_1.\delta u\,dx + \int_{\Sigma_{1F}} \mathrm{F}_1.\delta u\,ds, \\
&-\int_{\Omega_0} \operatorname{div}\delta\sigma^*.\frac{\overline{\operatorname{div}\sigma^{*\prime\prime}}}{\rho}\,dx + \int_{\Omega_0} \mathrm{Tr}(\mathrm{B}\sigma^{*\prime\prime}.\delta\sigma^*)\,dx - \int_{\Gamma} u''.\delta\sigma^* n_0\,ds \\
&\qquad\qquad = -\int_{\Omega_0} \frac{f_0}{\rho}.\operatorname{div}\delta\sigma^*\,dx, \\
&\int_{\Omega_0} [\mathrm{Tr}(\mathrm{B}\tau.\delta\sigma) + \mathrm{Tr}(\mathrm{B}\sigma^{*\prime\prime}.\delta\sigma)]\,dx = 0, \quad \forall (\delta u, \delta\sigma^*, \delta\sigma) \in U \times S_0 \times (L^2(\Omega_0))^6.
\end{aligned}
\right.
$$

Avec des conditions initiales sur (u, u'), (σ, σ') et également sur $(\sigma^*, \sigma^{*\prime})$ trouvées comme solutions d'un problème variationnel statique issu de $(9)_2$.

Remarques. — 1. On aurait pu obtenir à partir de (7) une formulation symétrique en (u, σ) mais elle aurait fait intervenir des dérivées du 4^e^ ordre en temps nécessitant des algorithmes non standards (ou du 2^e^ ordre$/_t$ en (u, σ^{**})), $\sigma = -\sigma^{**\prime}$ avec un 1^er^ ordre en t).

2. On aurait pu, comme dans [6], effectuer une translation d'espace en relevant :

$$\Phi_0|_{\Sigma_{0F}} \text{ dans } \Omega_0 (\sigma^* n_0 = -\Phi_0|_{\Sigma_{0F}}).$$

3.2. *Cas où seul le domaine Ω_1 est soumis à des sollicitations non nulles. Opérateur de masse ajoutée.* — $f_0 = 0$, $F_0 = 0$. Dans ces conditions, on démontre que la formulation à 3 champs (u, σ^*, σ) se ramène à une formulation *symétrique* à 2 champs (u, σ) sans augmenter le degré de dérivation *en temps* : la formulation reste du 2^e^ ordre. Ceci s'effectue au travers de l'opérateur de masse ajoutée indépendant du temps, défini comme suit :

$$(10)\quad m(\sigma, u_\Gamma;\ \sigma, u_\Gamma) = \operatorname*{Max}_{\sigma\in S_0}\left(\int_{\Omega_0}\left[-\frac{1}{2\rho}|\operatorname{div}\sigma^*|^2 + \mathrm{Tr}(\mathrm{B}\sigma^*.\sigma)\right]dx - \int_\Gamma \sigma^* n_0.u_\Gamma\,ds\right).$$

Les données provisoires (σ, u_Γ) devant vérifier *la condition d'existence :*

$$(11)\qquad \int_{\Omega_0} \mathrm{Tr}(\mathrm{B}\sigma.\delta\sigma)\,dx - \int_\Gamma u.\delta\sigma n_0\,ds = 0, \qquad \forall\,\delta\sigma \in S.$$

On a trouver $(u, \sigma) \in U \times (L^2(\Omega_0))^6$ satisfaisant (11) et tel que :

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_1} \rho u''.\delta u\,dx + m(\sigma'', u''_\Gamma; \delta\sigma, \delta u_\Gamma) + \int_{\Omega_1} \mathrm{Tr}(\mathrm{AD}(u).\mathrm{D}(\delta u))\,dx \\
&\qquad\qquad = \int_{\Omega_1} f_1.\delta u\,dx + \int_{\Sigma_{1F}} \mathrm{F}_1.\delta u\,ds, \\
&\qquad\qquad \forall (\delta u, \delta\sigma) \in U \times (L^2(\Omega_0))^6.
\end{aligned}
\right.
$$

Remarques. — (1) Cet opérateur m, dit de masse ajoutée, et défini ainsi de façon originale, représente mécaniquement l'énergie cinétique dans Ω_0 exprimée en fonction de σ et $u|_\Gamma$ au travers d'un problème statique définissant σ^*; il a donc bien été défini de façon indépendante de t.

(2) En vibrations [7], on retrouve le fait que m est indépendant de la pulsation propre ω([4], [5], [8]).

Interprétation mécanique des conditions d'existence (11) *et d'unicité* ($\sigma^* \in S_0$). — On montre que :

(1) (11) $\Leftrightarrow \exists$ un relèvement u de u_Γ dans Ω_0 tel que : $\sigma = AD(u)$ avec $AD(u).n_0 = 0$ sur $\Sigma_{0\,F}$.

(2) $(\sigma^* \in S_0) \Leftrightarrow \exists\, u^*$ dans Ω_0 tel que $\sigma^* = AD(u^*)$, $AD(u^*)\, n_0 = 0$ sur $\Sigma_{0\,F}$.

En reportant dans (10), (12) les relations $\sigma = AD(u)$ et $\sigma^* = AD(u^*)$ on retrouve le principe primal dans Ω_0. Ces deux résultats peuvent être étendus au cas de domaines non simplement connexes [2].

4. Interaction fluide-structure en milieu borné. — Considérons un fluide parfait compressible dans une structure élastique. σ devient la pression $-p$. σ^* est le potentiel des déplacements φ (à ρ près) : $p = -\rho\varphi''$. Pour un fluide barotrope, B devient $1/\rho c^2$, c étant la célérité du son dans le fluide. On obtient une formulation en (u, p, φ) comme cas particulier de (9), (10), (11), (12). $\sigma^* \in S_{\Phi_0}$ se simplifie car il s'agit alors d'un espace orthogonal aux fonctions de gradient nul (dimension finie) au lieu de divergence nulle (dimension infinie) ([4], [5], [8]).

Remarques. — (1) Dans le cas général où il y a une surface libre et des phénomènes de tension superficielle, on a une inconnue auxiliaire de plus, le champ η de déplacement normal de la surface libre ([4], [5]) (formulation à 4 champs).

(2) Dans le cas général, le problème peut se décomposer *en* 3 *sous-problèmes :* le problème hydroélastique, le problème de ballottement et le problème acoustique ([8], [5], [4]).

Conclusion. — Des formulations variationnelles *symétriques* couplées de type primal-dual en élastodynamique ont été établies. Ces concepts ont pu être étendus au cas des coques. Parmi les problèmes ouverts, citons celui de la résolution numérique efficace de (9). Il est à noter que dans les méthodes d'éléments finis mixtes en statique on cherche à se placer dans un espace de type S, tandis qu'en élastodynamique on se place dans un espace orthogonal, problème non classique [9]. Le cas de l'interaction fluide-structure par contre est traité commodément d'après les remarques du paragraphe 4.

(*) Remise le 17 octobre 1983.

[1] P. Germain, *Cours de méca. des mil. cont.*, Masson, Paris, 1973.

[2] R. Valid, *Mech. of Cont. Med. and Anal. of Struc.*, North-Holland, 1981.

[3] B. M. Fraeijs de Veubeke, *The Dual Principle in Elastodynamics* (*NATO Report*, Lisbon, Portugal, 1971).

[4] R. Ohayon, *La Rech. Aérosp.*, 1979, 3 et *Interaction fluide-structure en milieu borné* [*Thèse d'État* (à paraître)].

[5] R. Ohayon et R. Valid, *True Symmetric Formulations for Fluid-Structure Interaction*, in *Numerical Methods for Coupled Problems*, John Wiley and Sons, 1983.

[6] G. Duvaut et J.-L. Lions, *Les inéquations en méca. et en phys.*, Dunod, 1972.

[7] E. Sanchez-Palencia, *Non Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer-Verlag, *Lect. Notes et Phys.*, 1980.

[8] H. Morand et R. Ohayon, *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, 14, n° 5, 1979, p. 741-755.

[9] C. Canuto, *R.A.I.R.O.*, 15, n° 2, 1981.

Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales,
O.N.E.R.A., 92320 *Châtillon.*