DYNAMIQUE DES SYSTÈMES DE CORPS RIGIDES OU FLEXIBLES. — Principes variationnels couplés primal-dual en élastodynamique linéaire : cas des coques minces. Note de **Roger Ohayon** et **Roger Valid**, présentée par Georges Duvaut.

Remise le 21 novembre 1983.

Des principes variationnels de type primal-dual couplés sont présentés dans le cas des coques minces en élastodynamique.
Comme dans le cas tridimensionnel, l'introduction d'un champ auxiliaire permet l'écriture de principes symétriques. Le concept de masse ajoutée est également étendu à ces cas, ainsi que l'interprétation des conditions qui le régissent. Des principes purement duaux sont également indiqués comme cas particuliers.

RIGID AND DEFORMABLE BODIES DYNAMICS. — Coupled Primal-Dual Variational Principles in Linear Elastodynamics: Case of Thin Shells.

Coupled variational principles of a primal-dual type are presented in the case of thin shells in elastodynamics. Like in the three-dimensional case, the introduction of an auxiliary field allows for the writing of symmetric principles. The added mass concept is also extended to that cases, together with the interpretation of the conditions which govern it. Pure dual principles are also given as particular cases.

I. INTRODUCTION. — Dans une Note antérieure [1], on rappelait l'intérêt de l'utilisation des formulations duales pour le calcul précis des contraintes en statique ou en dynamique, en ajoutant que ces principes, d'utilisation numérique coûteuse, pouvaient se coupler avec profit avec le principe primal, de façon à réserver leur application aux régions critiques d'une structure.

L'écriture directe d'un tel couplage en élastodynamique aboutissant à un principe non symétrique, on montrait comment l'introduction d'une variable auxiliaire permettait l'écriture d'un principe bien symétrique d'une part, la mise en évidence d'un concept de masse ajoutée d'autre part, ainsi que les conditions qui régissent son calcul; ces dernières étant d'ailleurs d'application aisée dans les problèmes d'interactions fluide-structure.

On montre ici l'extension de la théorie au cas des coques minces élastiques en particulier sans cisaillement transverse.

II. COQUES SANS CISAILLEMENT TRANSVERSE. — On considère une coque de surface moyenne Σ_m de point générique m, de plan tangent $\vec{E}_2$ et de normale unitaire N au point m. Σ_m est supposée plongée dans l'espace $\vec{E}_3$ tridimensionnel, réel, euclidien, et de plus orientée, compacte, à connexion riemannienne. On appelle π le projecteur orthogonal de $\vec{E}_3$ sur $\vec{E}_2$ et V le vecteur déplacement de m. ν sera la normale unitaire extérieure dans $\vec{E}_2$ en tout point de $\partial\Sigma_m$.

On se donne une densité surfacique de forces extérieures, et des densités linéiques de forces et moments sur une partie $\partial\Sigma_{mF}$ de $\partial\Sigma_m$, ainsi que des déplacements V et des dérivés normales $\partial V_N/\partial\nu$ données sur la partie complémentaire $\partial\Sigma_{mV}$ de $\partial\Sigma_{mF}$ (on ne suppose aucun couple discret donné sur $\partial\Sigma_{mF}$ pour simplifier l'écriture). Toute quantité donnée ou inconnue est supposée fonction du temps t. $\mathcal{T}_e$ sera le travail des forces extérieures.

La coque est supposée sans cisaillement transverse, c'est-à-dire que la normale matérielle unitaire reste toujours confondue avec la normale géométrique à Σ_m, et à énergie de déformation normale nulle (hypothèse de Kirchhoff-Love).

Dans ces conditions le principe des travaux virtuels s'écrit [2] :

$$(1)\qquad \int_{\Sigma_m}\left[\mathrm{T}_r(\mathbf{n}\,\delta\gamma+\mathbf{m}\,\delta\kappa)+\rho_m\overline{\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial t^2}}\,\delta\mathrm{V}\right]-\delta\mathscr{T}_e=0,\qquad \forall\,\delta\mathrm{V}\ \text{C.A.}+\text{C.I.}$$

Dans (1), [n, m], [γ, κ] représentent respectivement contraintes et déformations surfaciques reliées par une loi élastique surfacique donnée vérifiant des conditions de symétrie et d'ellipticité. Ce sont des endomorphismes symétriques de $\vec{\mathrm{E}}_2$; la barre désigne la transposition, ρ_m est la masse spécifique surfacique de Σ_m; $\delta\mathrm{V}$ un déplacement virtuel cinématiquement admissible (C.A.), et $\delta\mathscr{T}_e$ le travail virtuel des forces et moments extérieurs donnés. On suppose également données les conditions initiales (C.I.). On a d'ailleurs les relations :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\gamma=\frac{1}{2}\left[\pi\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial m}+\frac{\pi\,\partial\mathrm{V}}{\partial m}\right]=\bar{\gamma}=\gamma(\mathrm{V}),\\ &\kappa=\overline{\frac{\pi\,\partial\mathrm{V}}{\partial m}}+\pi\frac{\partial\,\Delta\mathrm{N}}{\partial m}=\bar{\kappa}=\varkappa(\mathrm{V}),\qquad \Delta\mathrm{N}=-\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial m}\mathrm{N}\ \text{(rotation de N)}.\end{aligned}\right.$$

On considère maintenant une partition de la coque en deux régions adjacentes de surfaces moyennes Σ_{m_1} et Σ_{m_0} de frontière commune Γ, chacune affectée éventuellement de conditions aux limites et de chargements du type précédent.

En utilisant le principe d'Hellinger-Reissner modifié [3] dans la partie Σ_{m_0} de Σ_m, le principe (1) devient formellement :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_{\Sigma_{m_1}}[\widetilde{\mathbf{D}(\mathrm{V})}\,\mathrm{A}\,\mathbf{D}(\delta\mathrm{V})+\rho_m\ddot{\bar{\mathrm{V}}}\,\delta\mathrm{V}]-\int_\Gamma\bar{\nu}[\mathbf{t}\,\delta\mathrm{V}+\mathbf{m}\,\delta\mathrm{N}]\,ds-\delta\mathscr{T}_{e\,1}=0,\\ &\int_{\Sigma_{m_0}}[-\widehat{\mathrm{div}\,.\,\mathbf{t}}+\rho_m\ddot{\bar{\mathrm{V}}}]\,\delta\mathrm{V}+\int_{\partial\Sigma_{m_0}\mathrm{F}}\bar{\nu}_0[\mathbf{t}\,\delta\mathrm{V}+\mathbf{m}\,\delta\mathrm{N}]\,ds-\delta\mathscr{T}_{e0}=0,\\ &\int_{\Sigma_{m_0}}[-\widehat{\mathrm{div}\,.\,\delta\mathbf{t}\,.\,\mathrm{V}}-\tilde{\mathrm{C}}\mathrm{B}\,\delta\mathrm{C}]+\int_\Gamma\bar{\nu}[\delta\mathbf{t}\,.\,\mathrm{V}+\delta\mathbf{m}\,.\,\Delta\mathrm{N}]\,ds=0,\\ &\qquad\qquad\forall\,\delta\mathrm{V},\ \delta\mathrm{C}\ \text{admissibles}+\text{C.I.},\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{t}=\mathbf{n}+\mathbf{m}\frac{\partial\mathrm{N}_0}{\partial m_0}+\mathrm{N}_0\,\overline{\widehat{\mathrm{div}\,.\,\mathbf{m}}},\qquad \mathrm{T}_r(\mathbf{n}\,\delta\gamma+\mathbf{m}\,\delta\kappa)=\tilde{\mathrm{C}}\,\delta\mathrm{D},\\ &\mathrm{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{n}\\ \mathbf{m}\end{bmatrix},\qquad \mathrm{D}=\begin{bmatrix}\gamma\\ \kappa\end{bmatrix},\qquad \mathrm{C}=\mathrm{AD},\qquad \overline{\frac{\partial^2\mathrm{V}}{\partial t^2}}=\ddot{\bar{\mathrm{V}}},\\ &\delta\mathrm{N}=-\frac{\partial\,\delta\mathrm{V}}{\partial m_0}\mathrm{N}_0,\qquad \Delta\mathrm{N}=-\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial m_0}\mathrm{N}_0.\end{aligned}\right.$$

Avec $(4)_3$, il vient aussi :

$$(5)\qquad \bar{\nu}_0[\mathbf{t}\,\delta\mathrm{V}+\mathbf{m}\,\delta\mathrm{N}]=\overline{\mathscr{F}}\,\delta\mathrm{V}+\overline{\mathscr{M}}\frac{\partial\mathrm{N}_0\,\delta\mathrm{V}}{\partial\nu_0};\qquad [\mathscr{F}\,\mathscr{M}]=[\mathscr{F}_d\,\mathscr{M}_d]/\partial\Sigma_{m0\mathrm{F}}.$$

On introduit alors les espaces suivants (avec $B=A^{-1}$) :

$$\left|\begin{array}{l}\mathscr{V}=\left\{V\in[H^2(\Sigma_m)]^3,\ V=V_d/\partial\Sigma_{mV},\ \dfrac{\partial\overline{N}V}{\partial\nu}=\left.\dfrac{\partial\overline{N}V}{\partial\nu}\right|_d/\partial\Sigma_{mV}\right\},\\ X=\left\{C\in[H(\widehat{\operatorname{div} t},\ \Sigma_{m0})]^6,\ C=\tilde{C},\ (C_1,\ C_2)=\displaystyle\int_{\Sigma_{m0}}[\widehat{\operatorname{div} t_1}\,\widehat{\operatorname{div} t_2}+\tilde{C}_1 BC_2]\right\},\\ \mathscr{C}=\{C\in X,\ \widehat{\operatorname{div}.t}=0,\ [\mathscr{F}\mathscr{M}]=0/\partial\Sigma_{m0F}\},\\ \mathscr{C}_0=\mathscr{C}^{\perp}=\{C\in X,\ [\mathscr{F}\mathscr{M}]=0/\partial\Sigma_{m0F};\ \forall\,\delta C\in\mathscr{C}:(C,\ \delta C)=0/\Sigma_{m0}\},\\ \mathscr{C}_{\mathscr{F}}=\{C\in X,\ [\mathscr{F}\mathscr{M}]=[\mathscr{F}_d\mathscr{M}_d]/\partial\Sigma_{m0F};\ \forall\,\delta C\in\mathscr{C}:(C,\ \delta C)=0/\Sigma_{m0}\}.\end{array}\right.$$

En supposant vérifiées les équations d'Euler de $(3)_2$, c'est-à-dire l'équilibre dynamique, on peut éliminer V dans $(3)_3$ et on obtient un principe non symétrique. On utilise alors la variable auxiliaire C^* telle que :

$$C=-\ddot{C}^*, \tag{7}$$

ce qui fournit le principe symétrique suivant :

$$(8)\quad\left|\begin{array}{l}\text{Trouver}\\ \qquad [V,\ C^*,\ C]\in\mathscr{V}\times\mathscr{C}_{\mathscr{F}}\times[L^2(\Sigma_{m0})]^6,\\ \text{tels que :}\\ \displaystyle\int_{\Sigma_{m1}}[\widetilde{\mathbb{D}(V)}\,A\,\mathbb{D}(\delta V)+\rho_m\,\overline{\ddot{V}}\,\delta V]-\int_\Gamma\left[\overline{\ddot{\mathscr{F}}}{}^*\,\delta V+\overline{\ddot{\mathscr{M}}}{}^*\,\frac{\partial\overline{N}_0\,\delta V}{\partial\nu_0}\right]ds-\delta\mathscr{T}_{e1}=0,\\ \displaystyle\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\int_{\Sigma_{m0}}\left[\frac{\widehat{\operatorname{div}.t^*}\,.\,\widehat{\operatorname{div}.\delta t^*}}{\rho_m}-\tilde{C}B\,\delta C^*\right]\right.\\ \displaystyle\qquad\left.+\int_\Gamma\left[\delta\overline{\mathscr{F}}{}^*\,V+\delta\overline{\mathscr{M}}{}^*\,\frac{\partial\overline{N}_0\,V}{\partial\nu_0}\right]ds\right]-\delta\mathscr{T}_{e0}/\Sigma_{m0}=0,\\ \displaystyle\int_{\Sigma_{m0}}[\delta\tilde{C}BC+\delta\tilde{C}B\ddot{C}^*]=0,\\ \qquad\forall\,\delta V,\ \delta C^*,\ \delta C\in\mathscr{V}\times\mathscr{C}_0\times[L^2(\Sigma_{m0})]^6.\end{array}\right.$$

avec des conditions initiales sur V, $\dot{V}$, C, $\dot{C}$, C^*, $\dot{C}$, ces deux dernières étant trouvées comme solution d'un problème variationnel statique issue de $(8)_2$.

Notion de masse ajoutée. — Dans le cas où Σ_{m0} n'est soumise à aucun changement extérieur ($\delta\mathscr{T}_{e0}=0$), l'équation $(8)_2$ permet de calculer C^* en fonction de C, de V_Γ et de $\partial\overline{N}_0\,V/\partial\nu_0|_\Gamma$, par un calcul statique mettant en jeu une forme quadratique $\mathfrak{M}$ fonction de ces variables et appelée masse ajoutée. On trouve aisément :

$$(9)\quad \mathfrak{M}\left(C,\ V,\ \frac{\partial\overline{N}_0\,V}{\partial\nu_0}\right)\left(C,\ V,\ \frac{\partial\overline{N}_0\,V}{\partial\nu_0}\right)$$
$$=\underset{C^*\in\mathscr{C}_0}{\operatorname{Max}}\int_{\Sigma_{m0}}\left[-\frac{1}{2\,\rho_m}|\widehat{\operatorname{div}.t^*}|^2+\tilde{C}BC^*\right]-\int_\Gamma\left[\overline{\mathscr{F}}{}^*\,V_\Gamma+\overline{\mathscr{M}}{}^*\,\frac{\partial\overline{N}_0\,V_\Gamma}{\partial\nu_0}\right]ds.$$

Pour cette solution, cette quantité est égale à :

$$\int_{\Sigma_{m_0}} \frac{1}{2\,\rho_m} |\widehat{\operatorname{div}\mathfrak{t}^*}|^2 = \int_{\Sigma_{m_0}} \frac{1}{2} \rho_m |V|^2,$$

formule à rapprocher de l'équation d'équilibre locale [V $(3)_2$].

Les conditions *d'existence* et *d'unicité* de la solution s'écrivent respectivement [v. $(8)_2$] :

$$(10)\qquad \left(C,\ V,\ \frac{\partial \overline{N}_0 V}{\partial \nu_0}\right) \text{ tels que } \int_{\Sigma_{m_0}} \tilde{C} B\, \delta C - \int_{\Gamma} \left[\overline{\delta \mathscr{F}} . V + \overline{\delta \mathscr{M}} \frac{\partial \overline{N}_0 V}{\partial \nu_0} \right] ds = 0,$$
$$\forall\, \delta C \in \mathscr{C}, \qquad C^* \in \mathscr{C}_0.$$

La condition $(10)_1$ où $\delta C \in \mathscr{C} \Rightarrow \widehat{\operatorname{div}}\, \delta\mathfrak{t} = 0$, $\delta C = \overline{\delta C}$, conditions de fermeture qui, au moyen d'un théorème Poincaré et de fonctions de contrainte surfaciques [2], permet de montrer qu'il existe un relèvement V/Σ_{m_0} de V_Γ tel que $C = A\, \mathbb{D}(V)$, et satisfaisant à l'équilibre sur $\partial\Sigma_{m_0 F}$.

La condition d'unicité $(10)_2$ donne, par un calcul analogue :

$$[C^* \in \mathscr{C}_0] \Leftrightarrow \exists\, V^*/\Sigma_{m_0} \text{ tel que } C^* = A\, \mathbb{D}(V^*),$$

ce qui redonnerait un principe de type primal.

Ces conditions s'écrivent et s'interprètent également dans le cas de coques non simplement connexes.

Principe dual. — Un principe purement dual se déduit immédiatement de la formulation mixte sur Σ_{m_0} si $\Sigma_{m_1} = \varnothing$, soit :

$$\int_{\Sigma_{m_0}} [1/\rho_m \widehat{\operatorname{div}}\, \mathfrak{t} . \overline{\widehat{\operatorname{div}}\, \delta\mathfrak{t}} + \widetilde{\delta C} B \ddot{C}] - \delta \mathscr{T}_{e0} |_{\Sigma_{m_0}} = 0, \qquad C \in \mathscr{C}_{\mathscr{F}}; \quad \forall\, \delta C \in \mathscr{C}_0.$$

IV. Conclusions. — Les formulations variationnelles couplées symétriques ont été étendues au cas des coques sans cisaillement transverse en élastodynamique linéaire; les notions de masse ajoutée également. Les conditions d'existence et d'unicité ont fait l'objet d'une attention particulière et le problème du calcul d'une variable $C \in \mathscr{C}_0$, qui fait l'objet de certaines recherches actuelles ([4], [5]) reste ouvert, mais pourra sans doute bénéficier des résultats précédents. Le cas des coques avec cisaillement transverse se traite sans difficultés.

D'autres extensions sont en cours d'examen; signalons l'extension au cas de déformations non linéaires, et aux problèmes thermiques.

Références bibliographiques

[1] R. Ohayon et R. Valid, *Comptes rendus*, 297, série II, 1983, p. 783.

[2] R. Valid, *Mechanics of Continuous Media and Analysis of Structures*, North-Holland, 1981.

[3] R. Valid, *Le principe des travaux virtuels et les principes variationnels associés*, Publication O.N.E.R.A., n° 1982-1.

[4] C. Canuto, *R.A.I.R.O.*, 15, n° 2, 1981.

[5] S. Idelsohn et M. Geradin, *J. Sound Vibr.* 83, n° 2, 1982.

Office national d'Études et de Recherches aérospatiales,
29, avenue de la Division-Leclerc,
92322 Châtillon-sous-Bagneux Cedex.