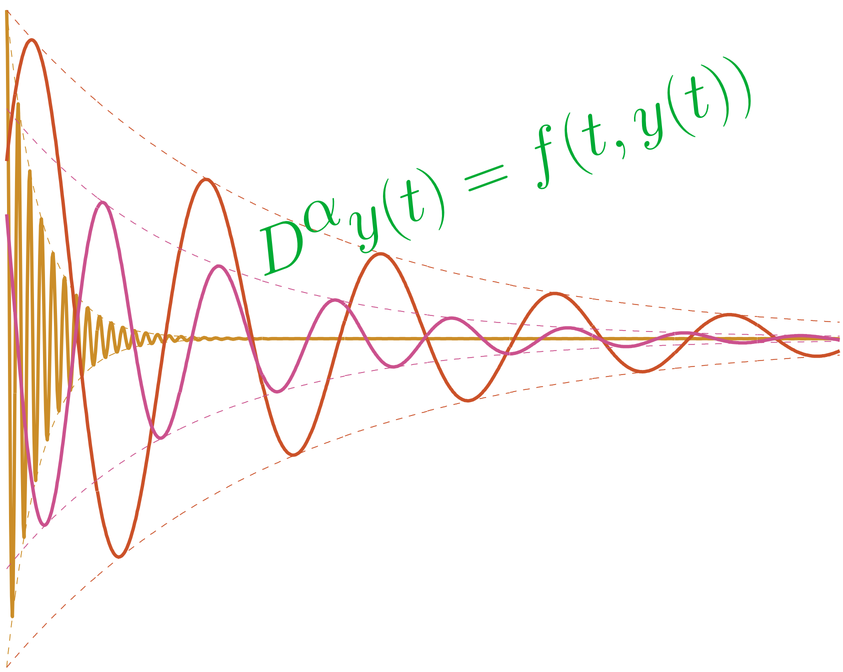
Conservatoire National des Arts et Métiers
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés

SMAI

Dérivation fractionnaire en mécanique
État-de-l'art et applications

Journée européenne



Le 17 Novembre 2006,

Conservatoire National des Arts et Métiers,
192 rue Saint-Martin, 75003 Paris

INTRODUCTION

La dérivation fractionnaire est une façon synthétique de décrire des comportements intermédiaires entre les dérivées classiques. Cela se voit simplement dans le domaine fréquentiel où ces modèles apparaissent comme des généralisations ou transitions entre les filtres analogiques du traitement du signal. Dans le domaine temporel en revanche, il en va tout autrement, car la dérivée fractionnaire agit comme une convolution dans le temps, et ne se limite pas à une prise de dérivée autour d'un instant donné, comme dans le cas entier : cela donne des modèles qualifiés d'héréditaires.

Au cours de cette journée, nous aborderons ces différents aspects des modèles fractionnaires, en prenant soin de mettre en avant les différents champs de connaissance qui peuvent et doivent se croiser pour donner vie à un objet mathématiquement délicat, qui prend tout son sens si l'on accepte de le regarder du point de vue traitement du signal, automatique, analyse numérique, et optimisation avec, toujours en ligne de mire, la richesse des applications à la mécanique, notamment en modélisation de l'amortissement.

Cette journée d'étude est **ouverte aussi bien aux universitaires qu'aux industriels** désireux d'élargir leurs connaissances ou souhaitant se renseigner sur des techniques innovantes et encore peu connues. Dans les présentations, l'accent est délibérément mis sur les cas pratiques où ces techniques ont déjà montré tout leur potentiel. En particulier, la table ronde et les discussions entre les exposées sont ouvertes afin d'exprimer les avis et besoins des industriels confrontés à ce type de problèmes et soucieux d'améliorer les transferts vers les applications.

Ce fascicule propose un résumé de chacune des présentations de la journée, ainsi qu'une bibliographie commentée, dont le but est d'aider et d'orienter les auditeurs soucieux d'en savoir plus vers les publications existantes.

Paris, le 16 Novembre 2006,
Les organisateurs :

Jean-François DEÜ
(Cnam Paris),

François DUBOIS
(Cnam Paris & Univ. Paris sud),

Ana Cristina GALUCIO BOURDET
(EADS CCR France),

Denis MATIGNON
(ENST Paris)

Olivier THOMAS
(Cnam Paris).

DÉFINITIONS DE BASE

Denis Matignon

Département Traitement du Signal et des Images (TSI), CNRS UMR 5141,
École Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST),
37-39, rue Dareau 75014 Paris,

denis.matignon@enst.fr
http ://www.tsi.enst.fr/∼matignon/hdr.html

Nous donnons quelques exemples d'application de la dérivation fractionnaire désormais classiques, puis nous rappelons brièvement des références théoriques. Cette courte page est extraite essentiellement du chapitre de livre [36], dont la version anglaise est à paraître [39].

1 Champs d'application

La modélisation de certains phénomènes physiques, dits *à mémoire longue* peut s'effectuer par l'introduction de termes intégro-différentiels à noyau faiblement singuliers (c'est-à-dire localement intégrables, mais pas nécessairement continus, comme $t^{\alpha-1}$ lorsque $0 < \alpha < 1$) dans les équations de la dynamique des matériaux ; ceci est très fréquent en *viscoélasticité linéaire à mémoire longue* par exemple, où une relation contrainte–déformation *dynamique fractionnaire* peut être proposée : voir [6] pour la viscoélasticité, [25] et [26] pour une présentation un peu plus formalisée, [2] pour un exemple riche et bien détaillé, [3] pour une analyse modale en régime forcé ou [5] pour une analyse modale en régime transitoire, et enfin [8] pour une modélisation qui fait intervenir une équation aux dérivées partielles avec dérivée fractionnaire en temps.

Il existe également des applications à la modélisation en *chimie des polymères* [4] ; ou à la modélisation de *dynamiques à l'interface de structures fractales* : voir [47] pour l'aspect physique appliquée, et par exemple [20] pour l'aspect physique théorique.

De plus, la dérivation fractionnaire peut apparaître *naturellement* lorsqu'un phénomène dynamique est fortement conditionné par la géométrie du problème : un exemple simple, très instructif, est présenté dans [66].

Nous conseillons tout particulièrement l'ouvrage [9] pour de nombreux exemples en mécanique des milieux continus. Les références [18, 31, 40, 33, 41, 57, 37, 23] montrent une modélisation de phénomènes viscothermiques en acoustique. Enfin, l'ouvrage [56] présente de nombreuses applications en sciences pour l'ingénieur.

2 Théories

La théorie de la dérivation fractionnaire remonte à plusieurs siècles déjà : un exposé historique détaillé est donné en introduction de [53] ; de plus, cet ouvrage est sans doute l'un des premiers à rassembler des résultats épars.

Récemment, une synthèse théorique a été proposée dans [48], où certains aspects algébriques des équations différentielles fractionnaires d'ordre rationnel sont complètement développés.

Sur le plan mathématique, l'ouvrage russe [61] fait autorité ; il regroupe un ensemble de définitions et de théories absolument unique. Notons que le modélisation par dérivation fractionnaire sera facilitée au lecteur qui connaîtra les bases de la théorie des distributions (voir notamment [62, 21, 19]), le calcul des résidus pour les fonctions de la variable complexe (voir [17, 10, 27, 16]), et qui aura une certaine connaissance des fonctions spéciales de la physique théorique ([49, 7, 28, 16]).

Concernant les opérateurs pseudo-différentiels, nous citerons [65, chapitre 7], et pour la notion de *représentation diffusive*, le premier article à notre connaissance sur le sujet est [64, § 5], qui utilise des notions déjà présentes dans [15] ; ces dix dernières années, la thématique s'est beaucoup développée, et on pourra consulter notamment l'ouvrage [44], pour le cadre théorique général et de nombreuses applications.

3 Plan de l'exposé

Dans cet exposé d'introduction au calcul fractionnaire, nous aborderons les points suivants :

1. **Définitions temporelles** : nous distinguerons, en prenant soin de les relier, les définitions de Caputo, de Riemann & Liouville et celle de Schwartz.

2. **Définitions fréquentielles** : nous examinerons la transformée de Laplace, celle de Fourier et les diagrammes de Bode correpondants de l'intégrateur et du dérivateur fractionnaires.

3. **Fonctions propres de Mittag-Leffler** : nous montrerons que ces fonctions jouent le même rôle, fondamental, que la fonction exponentielle pour les équations différentielles ordinaires, car elles nous permettront de résoudre les équations différentielles fractionnaires linéaires et à coefficients constants, en distinguant la réponse libre de la réponse forcée. Nous donnerons la condition nécessaire et suffisante de stabilité due à Matignon [32, 34] et analyserons des exemples d'oscillateurs 1-D avec amortissement fractionnaire, illustrés par des simulations numériques.

4. **Représentation diffusive** : pour finir, nous présenterons brièvement la réponse impulsionnelle, la réponse fréquentielle et le système dynamique associés au multimode apériodique toujours présent dans les systèmes fractionnaires. Nous montrerons comment un simple bilan d'énergie permet d'envisager l'analyse d'oscillateurs 1-D avec amortissement non-standard (exemple d'ordres de dérivations non rationnels, ou de dérivateurs fractionnaires non idéaux, par exemple bornés en fréquences, ...). Nous citerons à titre d'exemples les modèles de l'électromagnétisme : Debye ou Maxwell, Cole-Cole, Davidson-Cole, Havriliak-Negami qui, tous, sont diffusifs sans être, stricto sensu, fractionnaires.

Références

[1] J. Audounet, D. Matignon, and G. Montseny. Semi-linear diffusive representations for non-linear fractional differential systems. In *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 1*, volume 258 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 73–82. Springer, 2001.

[2] R. L. Bagley and R. A. Calico. Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *J. Guidance, Control and Dynamics*, **14**(2), pp. 304–311, 1991.

[3] R. L. Bagley and P. J. Torvik. Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA J.*, **21**(5), pp. 741–748, May 1983.

[4] R. L. Bagley and P. J. Torvik. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J. Rheology*, **27**(3), pp. 201–210, 1983.

[5] R. L. Bagley and P. J. Torvik. Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA J.*, **23**(6), pp. 918–925, Jun. 1985.

[6] R. L. Bagley and P. J. Torvik. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. *J. Rheology*, **30**(1), pp. 133–155, 1986.

[7] H. Bateman. *Higher transcendental functions*, volume 3, chapter XVIII, pages 206–212. McGraw Hill, New York, 1954.

[8] M. Caputo. Vibrations of an infinite plate with a frequency independent Q. *J. Acoust. Soc. Amer.*, **60**(3), pp. 634–639, Sept. 1976.

[9] A. Carpinteri and F. Mainardi, editors. *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*. Number 378 in CISM courses and lectures. Springer Verlag, 1997.

[10] H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Coll. Enseignement des Sciences. Hermann, 1961.

[11] B. d'Andréa-Novel and M. Cohen de Lara. *Commande Linéaire des Systèmes Dynamiques*. Coll. MASC. Masson, 1994.

[12] G. Dauphin, D. Heleschewitz, and D. Matignon. Extended diffusive representations and application to non-standard oscillators. In *Mathematical Theory of Networks and Systems symposium*, page 10, Perpignan, France, June 2000. MTNS. (invited session).

[13] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 8, chapter XVIII, pages 774–785. Éditions Masson, 1984.

[14] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 7, chapter XVI, pages 333–337. Éditions Masson, 1984.

[15] W. Desch and R. K. Miller. Exponential stabilization of Volterra integral equations with singular kernels. *J. of Integral Equations and Applications*, **1**(3), pp. 397–433, 1988.

[16] D. G. Duffy. *Transform methods for solving partial differential equations*. CRC Press, 1994.

[17] A. Erdélyi. *Asymptotic expansions*. Dover, 1956.

[18] Z. E. A. Fellah and C. Depollier. Transient acoustic wave propagation in rigid porous media : A time-domain approach. *J. Acoust. Soc. Amer.*, **107**(2), pp. 683–688, February 2000.

[19] G. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Éditions Masson, 1990.

[20] M. Giona and H. E. Roman. Fractional diffusion equation on fractals : one-dimensional case and asymptotic behaviour. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **25**, pp. 2093–2105, 1992.

[21] I. M. Guelfand and G. E. Chilov. *Les distributions, tome 1*, volume 8 of *Monographies Universitaires de Mathématiques*. Éditions Dunod, 1972. (transl. from Russian).

[22] H. Haddar and D. Matignon. Well-posedness of non-linear conservative systems when coupled with diffusive systems. In *Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS)*, volume 1, pages 251–256, Stuttgart, Germany, sep 2004.

[23] H. Haddar and D. Matignon. Theoretical and numerical analysis of the Webster-Lokshin model. Technical Report, Institut National de la Recherche en Informatique et Automatique (INRIA), 2006. to appear.

[24] D. Heleschewitz. *Analyse et simulation de systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous représentation diffusive*. PhD thesis, ENST, December 2000.

[25] R. C. Koeller. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *J. Appl. Mech.*, **51**, pp. 299–307, Jun. 1984.

[26] R. C. Koeller. Polynomial operators, Stieltjes convolution, and fractional calculus in hereditary mechanics. *Acta Mech.*, **58**, pp. 251–264, 1986.

[27] K. S. Kölbig. Laplace transform. Lectures in the academic training programme, CERN, Geneva, 1968–69.

[28] J. L. Lavoie, T. J. Osler, and R. Tremblay. Fractional derivatives and special functions. *SIAM Review*, **18**(2), pp. 240–268, 1976.

[29] A. Lion. On the thermodynamics of fractional damping elements. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **9**, pp. 83–96, 1997.

[30] A. A. Lokshin. Wave equation with singular retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **240**, pp. 43–46, 1978. (in Russian).

[31] A. A. Lokshin and V. E. Rok. Fundamental solutions of the wave equation with retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **239**, pp. 1305–1308, 1978. (in Russian).

[32] D. Matignon. *Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*. Thèse de Doctorat, discipline Automatique et Traitement du Signal, Univ. Paris XI, Novembre 1994.

[33] D. Matignon. Fractional modal decomposition of a boundary-controlled-and-observed infinite-dimensional linear system. In *Mathematical Theory of Networks and Systems*, page 5, Saint Louis, Missouri, June 1996. MTNS.

[34] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In *Computational Engineering in Systems Applications*, volume 2, pages 963–968, Lille, France, July 1996. IMACS, IEEE-SMC. (invited session).

[35] D. Matignon. Stability properties for generalized fractional differential systems. *ESAIM : Proceedings*, **5**, pp. 145–158, December 1998. URL : *http ://www.edpsciences.org/articlesproc/Vol.5/*.

[36] D. Matignon. *Introduction au calcul fractionnaire et applications*, volume 1 of Fractals et Lois d'Échelle of *Traité "Information - Commande - Communication"*, chapter 4, pages 143–184. Hermès, 2002.

[37] D. Matignon. Asymptotic stability of the Webster-Lokshin model. In *Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, 11 p. CD–Rom, Kyoto, Japan, jul 2006. (invited session).

[38] D. Matignon. *De la dérivation fractionnaire aux opérateurs pseudo-différentiels diffusifs : applications à la modélisation physique et au contrôle des systèmes*. Habilitation à Diriger des Recherches, discipline Mathématiques, Univ. Paris VI, Juin 2006.

[39] D. Matignon. *An introduction to fractional calculus*, volume 1 of Scaling, Fractals and Wavelets of *Digital Signal and Image Processing Series*, chapter 4. Hermès–Lavoisier, 2006.

[40] D. Matignon, J. Audounet, and G. Montseny. Energy decay for wave equations with damping of fractional order. In *Fourth international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, pages 638–640, Golden, Colorado, June 1998. INRIA, SIAM.

[41] D. Matignon and B. d'Andréa-Novel. Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE. In *Third international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, pages 769–771, Mandelieu, France, April 1995. INRIA, SIAM.

[42] D. Matignon and B. d'Andréa-Novel. Some results on controllability and observability of finite-dimensional fractional differential systems. In *Computational Engineering in Systems Applications*, volume 2, pages 952–956, Lille, France, July 1996. IMACS, IEEE-SMC. (invited session).

[43] D. Matignon and B. d'Andréa-Novel. Observer-based controllers for fractional differential systems. In *Conference on Decision and Control*, pages 4967–4972, San Diego, California, December 1997. IEEE-CSS, SIAM. (invited session).

[44] D. Matignon and G. Montseny, editors. *Fractional Differential Systems : models, methods and applications*, volume 5 of *ESAIM : Proceedings*, URL : *http ://www.edpsciences.org/articlesproc/Vol.5/*, December 1998. SMAI.

[45] D. Matignon and Ch. Prieur. Asymptotic stability of linear conservative systems when coupled with diffusive systems. *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations (ESAIM :COCV)*, **11**, pp. 487–507, jul 2005.

[46] D. Matignon and H. Zwart. Standard diffusive systems are well-posed linear systems. In *Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, Leuven, Belgium, jul 2004. (invited session).

[47] A. Le Mehauté. *Les géométries fractales*. Éditions Hermès, 1990.

[48] K. S. Miller and B. Ross. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. John Wiley & Sons, 1993.

[49] G. Mittag-Leffler. Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. *Acta Math.*, **29**, pp. 101–168, Sept. 1904.

[50] G. Montseny, J. Audounet, and D. Matignon. Fractional integrodifferential boundary control of the Euler–Bernoulli beam. In *Conference on Decision and Control*, pages 4973–4978, San Diego, California, December 1997. IEEE-CSS, SIAM. (invited session).

[51] G. Montseny, J. Audounet, and D. Matignon. Diffusive representation for pseudo-differentially damped non-linear systems. In *Nonlinear control in the year 2000, Vol. 2*, volume 259 of *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, pages 163–182. Springer, 2001.

[52] J. A. Nohel and D. F. Shea. Frequency domain methods for Volterra equations. *Advances in Mathematics*, **22**, pp. 278–304, 1976.

[53] K. B. Oldham and J. Spanier. *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York and London, 1974.

[54] A. Oustaloup. *Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire*. Série Automatique. Masson, 1983.

[55] P. Petropoulos. On the time-domain response of Cole-Cole dielectrics. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, **53**(11), pp. 3741–3746, 2005.

[56] I. Podlubny. *Fractional differential equations*, volume 198 of *Mathematics in science and engineering*. Academic Press, 1999.

[57] J.-D. Polack. Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases : a diffusion process. *J. Acoustique*, **4**, pp. 47–67, Feb. 1991.

[58] T. Pritz. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. *J. Sound and Vibration*, **195**(1), pp. 103–115, 1996.

[59] M. Renardy, W. J. Hrusa, and J. A. Nohel. *Mathematical problems in viscoelasticity*, volume 35 of *Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics*. Longman Scientific, 1987.

[60] B. Ross, editor. *Fractional Calculus and Its Applications*, number 457 in Lecture Notes in Mathematics, New Haven, June 1974. Proceedings of the international conference, Springer Verlag.

[61] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*. Gordon & Breach, 1987. (transl. from Russian, 1993).

[62] L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Coll. Enseignement des Sciences. Hermann, 1965.

[63] E. D. Sontag. *Mathematical Control Theory. Deterministic Finite Dimensional Systems*, volume 6 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Verlag, 1990.

[64] O. J. Staffans. Well-posedness and stabilizability of a viscoelastic equation in energy space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **345**(2), pp. 527–575, October 1994.

[65] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations. II : Qualitative studies of linear equations*, volume 116 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, 1996.

[66] P. J. Torvik and R. L. Bagley. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *J. Appl. Mech.*, **51**, pp. 294–298, Jun. 1984.

[67] J. C. Willems. Dissipative dynamical systems. part I : general theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **45**(5), pp. 321–351, 1972.

IDENTIFICATION : LA DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE DANS LE COMPORTEMENT VIBRATOIRE DES MATÉRIAUX ET STRUCTURES

Yvon Chevalier[♭] **Tibi Beda**[♯]

[♭]Institut Supérieur de Mécanique de Paris (ISMEP - SUPMECA)
Équipe Vibroacoustique du LISMMA,
3 Rue Fernand Hainaut, SAINT-OUEN, France
yvon.chevalier@supmeca.fr

[♯]E.N.S.P. (National Advanced School of Engineering of University of Yaounde I),
B.P. 8390 Yaounde, Cameroun
tibi.beda@supmeca.fr, tbeda@yahoo.com

L'amortissement dans les matériaux est une source non négligeable de dissipation d'énergie vibratoire dans les structures, les micro-frottements au sein des liaisons assurant un complément comparable. Si l'amortissement spécifique (rapport de l'énergie dissipée sur un cycle à l'énergie fournie) reste une approche globale très générale du phénomène, il n'intègre pas les mécanismes intimes du phénomène de dissipation qui peuvent être développés à partir de la physique de la structure vibratoire. Une modélisation globale de la dissipation par l'amortissement visqueux (dépendance de la vitesse) permet de représenter la physique de manière réaliste et efficace. Le problème d'identification (choix du modèle, paramétrique ou non paramétrique) est alors ouvert : recalage des paramètres dans les modèles paramétriques.

Dans le domaine des matériaux, l'approche viscoélastique (linéaire ou non) est très adaptée à la modélisation des phénomènes d'amortissement (cf. [1] , [2] et [3]).

- ▷ Elle permet de globaliser tous les phénomènes dissipatifs élémentaires,
- ▷ elle est compatible avec la thermodynamique des milieux continus et facilite l'introduction de variables internes permettant d'interpréter les phénomènes physiques, (cf [4]),
- ▷ elle est le siège de nombreux modèles paramétriques performants (opérateurs différentiels, modèles rhéologiques),
- ▷ son formalisme rigoureux rentre dans le cadre de l'utilisation d'outils mathématiques adaptés.

L'approche paramétrique ajustée sur des résultats expérimentaux (cf. [5], [6]) par la dérivée fractionnaire, permet de modéliser de manière économique les matériaux dans une large gamme de fréquences (cf. [7], [8] et [9]). La dérivée fractionnaire recalée en régime fréquentiel autorise un passage en régime temporel respectant les lois de la physique (principe de causalité par exemple).

L'approche du comportement viscoélastique paramétrique par dérivée fractionnaire sera illustrée par des méthode récentes d'identification des paramètres à partir de résultats expérimentaux sur plusieurs matériaux.

Références

[1] R. M. Christensen, *Theory of viscoelasticity : An introduction*, Academic Press, New York, 1971.

[2] J. C. Simo, T. J. R. HUGHES, *Computational inelasticity*, Springer, New York, 1998.

[3] D. I. Jones, *Handbook of viscoelastic Vibration Damping*, J. Wiley & Son, New York 2001.

[4] A. Hanyga, "An anisotropic Cole-Cole viscoelastic model of seismic attenuation", *J. Comput. Acoustics*, **11** (2003), pp.75-90.

[5] M. Soula, Y. Chevalier, "La dérivée fractionnaire en rhéologie des polymères - Application aux comportements élastiques et viscoélastiques linéaires des élastomères". *ESAIM : Proceeding Fractional Differential Equation : Models, Methods and Applications*, **5** (1998) pp. 193-204.

[6] M. Soula, Y. Chevalier, "Transient responses of polymers and elastomers deduced from harmonic responses", *J. Sound Vib.*, **205** (1997) pp. 185-203.

[7] T. Beda, Y. Chevalier, "New methods for identifying rheological parameters for fractional derivative modelling of viscoelatic behaviour", *Mechanics of time dependent Material*, **8**, (2004), pp.105-118.

[8] T. Beda, Y. Chevalier, "Identification of viscoelastic fractional complex modulus", *AIAA Journal*, **42** (7),(2004), pp.1450-1456).

[9] R. L. Baglet, P. J. Torvik, "Fractional Calculus- A different approach to the analysis of viscoelastic damped structures", *AIAA Journal*, **21** (5), (1983), pp. 741-748.

Systèmes différentiels fractionnaires et irrationnels : approximation et optimisation.

Thomas Hélie

Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique (IRCAM)
CNRS-UMR 9912
1 place Igor Starvinsky 75004 Paris
thomas.helie@ircam.fr

Les systèmes linéaires différentiels fractionnaires sont difficiles et coûteux à simuler dans le domaine temporel. Dans le domaine de Laplace, ils présentent des singularités standard de type pôle mais aussi de type coupure. Nous montrerons comment cette analyse de singularités permet de fournir des représentations intégrales (appelées aussi représentations diffusives) de ces systèmes aussi bien dans le domaine de Laplace que le domaine temporel. Ces représentations exactes permettent de définir assez naturellement des approximations dont les paramètres peuvent s'obtiennent soit par une méthode d'interpolation soit par optimisation. La première méthode peut conduire à des approximations convergentes mais de haute dimension. La seconde permet d'aboutir à des approximations très efficaces pour des choix de critères (mesure de pondération, régularisation, contraintes) bien adaptés aux applications visées.

Nous présenterons ces résultats sur plusieurs examples concrets (systèmes fractionnaires mais aussi des systèmes plus généraux de fonctions de transfert irrationnelles).

Références

[1] M. Dunau. Représentations diffusives de seconde espèce : introduction et expérimentation. Master's thesis, DEA d'Automatique, Toulouse, 2000.

[2] G. Garcia and J. Bernussou. Identification of the dynamics of a lead acid battery by a diffusive model. *ESAIM : Proceedings*, **5**, pp. 87–98, December 1998. URL : *http ://www.edpsciences.org/articles/proc/Vol.5/*.

[3] T. Hélie and D. Matignon. Diffusive reprentations for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS)*, **16**, pp. 503–536, jan 2006.

[4] T. Helie and D. Matignon. Representations with poles and cuts for the time-domain simulation of fractional systems and irrational transfer functions. *Signal Processing (SP)*, **86**, pp. 2516–2528, jul 2006.

[5] T. Helie, D. Matignon, and R. Mignot. Criterion design for optimizing low-cost approximations of infinite-dimensional systems : towards efficient real-time simulation. In *IFAC workshop on Control Applications of Optimisation (CAO'06)*, pages 368–373, Cachan, France, may 2006.

A SURVEY OF NUMERICAL METHODS IN FRACTIONAL CALCULUS

Kai Diethelm$^{\flat\sharp}$

$^{\flat}$ Institut Computational Mathematics,
Technische Universität Braunschweig
Pockelsstr. 14, 38106 Braunschweig, Germany,
k.diethelm@tu-bs.de

$^{\sharp}$ Gesellschaft für Numerische Simulation mbH (GNS),
Am Gaußberg 2, 38114 Braunschweig, Germany,
diethelm@gns-mbh.com

In many applications in science and engineering, one needs to find fractional derivatives or integrals of a given function or to solve a (partial or ordinary) fractional differential equation. However, normally it is impossible to find exact analytical expressions for the solution of the problem at hand. This is true already in situations where the given function (i.e. the function that needs to be differentiated or integrated, or the right-hand side of the differential equation) is of a relatively simple nature. And even if one is in the lucky position to have found an analytic solution, then this solution is likely to be of a very complicated form (typically an expression involving special functions or other types of infinite series), so that it cannot be handled conveniently. Thus there is a large demand for efficient and reliable numerical methods in fractional calculus.

In this talk, we shall therefore discuss a number of numerical methods that can be used to compute approximate solutions for problems of the types mentioned above. We will restrict our attention to problems involving fractional derivatives or integrals of Riemann-Liouville and Caputo type. Since most applications require the solution of fractional differential equations of the form

$$D^{\alpha} y(t) = f(t, y(t))$$

(augmented by some properly chosen initial or boundary conditions), the main focus of the talk will be on this class of problems. Due to the lack of time, we will not be able to talk about multi-order fractional differential equations like

$$D^{\alpha_n} y(t) = f(t, y(t), D^{\alpha_1} y(t), D^{\alpha_2} y(t), \ldots, D^{\alpha_{n-1}} y(t)),$$

a class of equations that introduces a whole set of additional new difficulties [3, 4].

In particular, we shall compare algorithms based on the Grünwald-Letnikov approach [9, 10] (already discussed in the classical book of Oldham and Spanier [13]), algorithms based on Lubich's fractional generalization of linear multistep methods [11, 12] (the most important subclass of which is formed by fractional backward differentiation formulas) and algorithms based on classical numerical integration techniques [2, 5, 6]. Finally we talk about approaches that have been tailored for certain very specific problems [1].

Among the specific questions to be discussed we shall have :

- ▷ What can we say about the (theoretical) order of convergence of the algorithms ?
- ▷ Can we reduce the inherent arithmetic complexity (which is mainly due to the non-locality of fractional differential operators) ? Podlubny [14] and Ford and Simpson [8] have dealt with approaches in this context.
- ▷ Given a formal mathematical (i.e. theoretical) description of a rapidly convergent algorithm, how can we implement it in a reliable way in practice ? It has been shown in [7] that this may be a highly difficult task.

Based on the answers for these questions, we will identify some prototype algorithms for the most common problems. These algorithms are going to form the core of a software library that is presently under development at GNS.

Références

[1] O. P. Agrawal : Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain. *Nonlinear Dynam.* **29** (2002), pp. 145–155.

[2] K. Diethelm : An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Elec. Transact. Numer. Anal.* **5** (1997), pp. 1–6.

[3] K. Diethelm : Efficient solution of multi-term fractional differential equations using P(EC)^{m}E methods. *Computing* **71** (2003), pp. 305–319.

[4] K. Diethelm and N. J. Ford : Multi-order fractional differential equations and their numerical solution. *Appl. Math. Comput.* **154** (2004), pp. 621–640.

[5] K. Diethelm, N. J. Ford and A. D. Freed : Detailed error analysis for a fractional Adams method. *Numer. Algorithms* **36** (2004), pp. 31–52.

[6] K. Diethelm, N. J. Ford, A. D. Freed and Y. Luchko : Algorithms for the fractional calculus : A selection of numerical methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **194** (2005), pp. 743–773.

[7] K. Diethelm, J. M. Ford, N. J. Ford and M. Weilbeer : Pitfalls in fast numerical solvers for fractional differential equations. *J. Comput. Appl. Math.* **186** (2006), pp. 482–503.

[8] N. J. Ford and A. C. Simpson : The numerical solution of fractional differential equations : Speed versus accuracy. *Numer. Algorithms* **26** (2001), pp. 333–346.

[9] A. K. Grünwald : Über "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung. *Z. Math. Phys.* **12** (1867), pp. 441–480.

[10] A. V. Letnikov : Theory of differentiation with an arbitrary index. *Math. Sb.* **3** (1868), pp. 1–66 (in Russian).

[11] C. Lubich : Fractional linear multistep methods for Abel-Volterra integral equations of the second kind. *Math. Comp.* **45** (1985), pp. 463–469.

[12] C. Lubich : Discretized fractional calculus. *SIAM J. Math. Anal.* **17** (1986), pp. 704–719.

[13] K. B. Oldham and J. Spanier : *The Fractional Calculus*. Academic Press, New York, 1974 ; Reprint : Dover, New York, 2006.

[14] I. Podlubny : *Fractional Differential Equations*. Academic Press, San Diego, 1999.

ON THE USE OF FRACTIONAL DERIVATIVE OPERATORS TO DESCRIBE VISCOELASTIC DAMPING IN STRUCTURAL DYNAMICS

—

FINITE ELEMENT FORMULATION OF SANDWICH BEAMS AND APPROXIMATION OF FRACTIONAL DERIVATIVES BY USING THE G^{α} SCHEME

Ana Cristina Galucio Bourdet[♭] **Jean-François Deü**[♮] **François Dubois**[♮♯]

[♭]EADS Corporate Research Center France,
DCR/SP/SM,
12, rue Pasteur - BP 76, 92152 Suresnes cedex, France
Ana-Cristina.Bourdet@eads.net

[♮]Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes couplés (LMSSc)
Conservatoire National des Arts et Métiers (Cnam)
Case 353, 2 rue Conté, 75003 Paris, France
deu@cnam.fr

[♯]Laboratoire de Mathématique, Analyse Numérique et Équations aux Dérivées Partielles,
Université Paris Sud
Bâtiment 425, 91405 Orsay, France
francois.dubois@math.u-psud.fr

Many investigations have demonstrated the potential of viscoelastic materials to improve the dynamics of lightly damped structures. There are numerous techniques to incorporate these materials into structures. The constrained layer passive damping treatment is already largely used to reduce structural vibrations, especially in conjunction with active control [2, 10, 16]. One of the crucial questions is how to quantify such a material damping if the viscoelastic solid has a weak frequency dependence on its dynamic properties over a broad frequency range. Classical linear viscoelastic models, using integer derivative operators, convolution integral or internal variables, become cumbersome due to the high quantity of parameters needed to describe the material behavior. In order to overcome these difficulties, fractional derivative operators acting on both, strain and stress can be employed.

Until the beginning of the 80s, the concept of fractional derivatives associated to viscoelasticity was regarded as a sort of curve-fitting method. Later, Bagley and Torvik [1] gave a physical justification of this concept in a thermodynamic framework. Their fractional model has become a reference in literature. Special interest is today dedicated to the implementation of fractional constitutive equations into FE formulations. In this context, the numerical methods in the time domain are generally associated with the Grünwald formalism for the fractional order derivative of the stress-strain relation in conjunction with a time discretization scheme. Most of the approaches found in literature are restricted to single-degree-of-freedom systems and bar-type structures although the numerical investigation can be sophisticated (see, for example, [15, 6, 5]). On the other side, the numerical community is interested in the approximation of fractional derivatives. One refers to the pioneering theoretical work of Lubich [13] and the state of the art proposed by Diethelm et al. [3]. Most applications use the discrete convolution formula proposed by Grünwald-Letnikov [11, 12]. Another direction could be autonomous systems in the context of diffusive representations [14, 18, 17].

This work is split up in two parts. The first one concerns a finite element formulation for transient dynamic analysis of sandwich beams with embedded viscoelastic material using fractional derivative constitutive equations. The sandwich configuration is composed of a viscoelastic core (based on Timoshenko theory) sandwiched between elastic faces (based on Euler-Bernoulli assumptions). The viscoelastic model used to describe the behavior of the core is a four-parameter fractional derivative model. Concerning the parameter identification, a strategy to estimate the fractional order of the time derivative and the relaxation time is outlined. Curve-fitting aspects are focused, showing a good agreement with experimental data. In order to implement the viscoelastic model into the finite element formulation, the Grünwald definition of the fractional operator is employed. To solve the equation of motion, a direct time integration method based on the implicit Newmark scheme is used. One of the particularities of the proposed algorithm lies in the storage of displacement history only, reducing considerably the numerical efforts related to the non-locality of fractional operators. After validations, numerical applications are presented in order to analyze truncation effects (fading memory phenomena) and solution convergence aspects. This investigation was carried out in [9] and thoroughly described in the PhD thesis [7].

The second part of this work focus on the development of a numerical method based on the Gear scheme – which is a three-level step algorithm, backward in time and second order accurate – for the approximation of fractional derivatives (see [8]). After a first tentative [4] for preliminary tests using semi-derivatives, we focus on i) the analytic determination of the coefficients of the numerical scheme and ii) a set of preliminary tests in order to derive orders of convergence. Herein, the formal power of the Gear scheme is proposed to approximate fractional derivative operators in the context of finite difference methods. Some numerical examples are presented and analyzed in order to show the effectiveness of the present Gear scheme at the power α (G^{α}-scheme) when compared to the classical Grünwald-Letnikov approximation. In particular, for a fractional damped oscillator problem, the combined G^{α}-Newmark scheme is shown to be second-order accurate.

Références

[1] R.L. Bagley and P.J. Torvik. Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. *AIAA Journal*, **21**, pp. 741–748, 1983.

[2] A. Baz. Boundary control of beams using active constrained layer damping. *Journal of Vibration and Acoustics*, **119**, pp. 166–172, 1997.

[3] K. Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, and Yu. Luchko. Algorithms for the fractional calculus : A selection of numerical methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, pp. 743–773, 2005.

[4] F. Dubois and S. Mengué. Schémas numériques implicites pour les équations semi-différentielles. Technical Report 334, IAT–CNAM, June 2000.

[5] M. Enelund and B.L. Josefson. Time-domain finite element analysis of viscoelastic structures with fractional derivatives constitutive relations. *AIAA Journal*, **35**, pp. 1630–1637, 1997.

[6] J. Escobedo-Torres and J.M.Ricles. The fractional order elastic-viscoelastic equations of motion : formulation and solution methods. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **9**, pp. 489–502, 1998.

[7] A.C. Galucio. *Atténuation des réponses transitoires par traitement hybride piézoélectrique/viscoélastique en utilisant un modèle à dérivées fractionnaires*. PhD thesis, CNAM Paris, 2004. In French.

[8] A.C. Galucio, J.-F. Deü, S. Mengué, and F. Dubois. An adaptation of the Gear scheme for fractional derivatives. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, pp. 6073–6085, 2006.

[9] A.C. Galucio, J.-F. Deü, and R. Ohayon. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. *Computational Mechanics*, **33**, pp. 282–291, 2004.

[10] A.C. Galucio, J.-F. Deü, and R. Ohayon. A fractional derivative viscoelastic model for hybrid active/passive damping treatments in time domain – Application to sandwich beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, **16**, pp. 33–45, 2005.

[11] A.K. Grünwald. Über "begrenzte" Derivationen and deren Anwendung. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, **12**, pp. 441–480, 1867.

[12] A.V. Letnikov. Theory of differentiation of an arbitrary order. *Mat. Sb.*, **3**,pp. 1–68, 1868. In Russian.

[13] C.H. Lubich. Discretized fractional calculus. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **17**(3), pp. 704–719, 1986.

[14] D. Matignon and G. Montseny (Eds.). *Fractional differential Systems : models, methods ans applications*. ESAIM Proceedings **5**, SMAI, Paris, 1998.

[15] J. Padovan. Computational algorithms for FE formulations involving fractional operators. *Computational Mechanics*, **2**, pp. 271–287, 1987.

[16] M.A Trindade, A. Benjeddou, and R. Ohayon. Finite element modelling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams – part I : Formulation ; part II : System analysis. *International Journal Numer. Meth. Eng.*, **51**, pp. 835–864, 2001.

[17] C. Trinks and P. Ruge. Treatment of dynamic systems with fractional derivatives without evaluating memory-integrals. *Computational Mechanics*, **29**, pp. 471–476, 2002.

[18] L. Yuan and O.P. Agrawal. A numerical scheme for dynamic systems containing fractional derivatives. *Journal of Vibration and Acoustics*, **124**, pp. 321–324, 2002.

Fondement géométrique des opérateurs de dérivation fractionnaire et conséquences en termes d'applications.

Alain Le Méhauté

ISMANS,
Campus européen de l'université du Québec,
44 Avenue Bartholdi, 72000 Le MANS,
alm@ismans.fr

Il existe un lien direct entre la dynamique de processus intrinsèquement simples en géométries fractales et les équations différentielles d'ordre fractionnaire. Ce sont entre autres les géométries fractales qui ont permis dès 1977 de pointer l'importance de ce type d'équation pour le traitement des systèmes récursifs et d'en donner par ailleurs une interprétation analytique en terme de théorie des distributions. Cette analyse a largement été confirmée par l'expérience en dépit de réserves toujours vivantes.

L'importance de l'interprétation géométrique n'est pas plus dans les réserves formulées que dans l'usage qui est fait du concept de fractalité pour biaiser les équations différentielles d'ordre entier. Elle est plutôt dans la capacité de projections scientifiques qu'autorise l'interprétation géométrique des équations différentielles fractionnaires. Nous illustrerons notre propos au moyen de trois exemples à notre sens emblématiques.

- ▷ D'une part la réponse dynamique des processus browniens fractionnaires plongés dans des géométries fractales.
- ▷ D'autre part l'ouverte que propose la thermodynamique statistique fractionnaire pour des processus stationnaires ou de «méta équilibres» dans des environnements complexes.
- ▷ Enfin la perspective tracée par l'interprétation de la conjecture de Riemann en terme de piégeage de phase associé à l'opérateur d'ordre $1/2$.

L'auteur souhaite remercier L. Nivanen et A. El Kaabouchii pour leur collaboration aux recherches évoquées.