

L'interaction roue aubagée/carter par contact mécanique : un nouvel enjeu dans le développement des turbomachines modernes

Mathias Legrand

Faculté de Génie, Université de McGill

Séminaire Cnam/LMSSC - ONERA/DDSS
Conservatoire National des Arts et Métiers

Lundi 9 juin 2008



plan

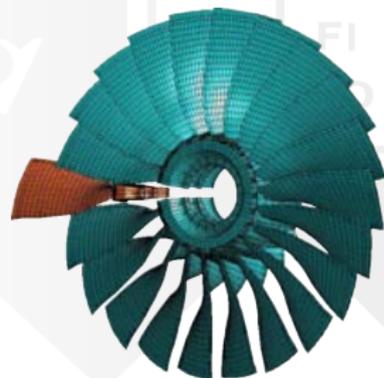
- 1 Problématique générale
- 2 Modélisation 2D
- 3 Modèle semi-analytique
- 4 Interaction modale 3D
- 5 Aube en surlongueur
- 6 Autres thématiques



structure à symétrie cyclique

définition

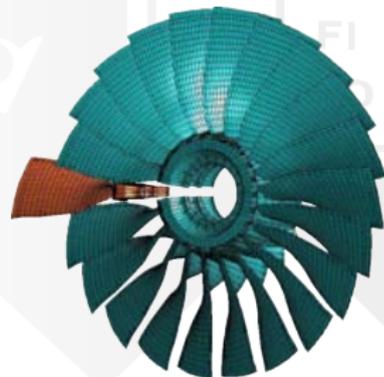
répétition adjacente et fermée autour d'un axe de symétrie d'une entité minimale appelée secteur



structure à symétrie cyclique

définition

répétition adjacente et fermée autour d'un axe de symétrie d'une entité minimale appelée secteur



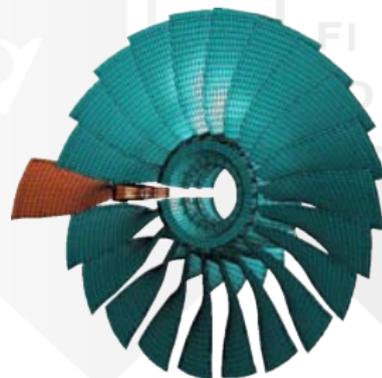
caractéristiques mathématiques

- matrices masse et raideur circulantes par bloc
- espace des coordonnées cycliques
- modes doubles à diamètres
 - fréquence et forme identiques
 - orthogonaux

structure à symétrie cyclique

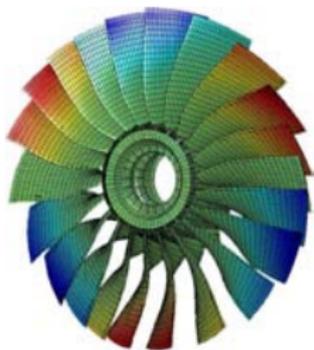
définition

répétition adjacente et fermée autour d'un axe de symétrie d'une entité minimale appelée secteur



caractéristiques mathématiques

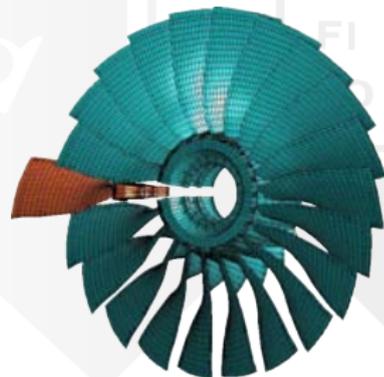
- matrices masse et raideur circulantes par bloc
- espace des coordonnées cycliques
- modes doubles à diamètres



structure à symétrie cyclique

définition

répétition adjacente et fermée autour d'un axe de symétrie d'une entité minimale appelée secteur



caractéristiques mathématiques

- matrices masse et raideur circulantes par bloc
- espace des coordonnées cycliques
- modes doubles à diamètres



$\cos \omega t +$



$\sin \omega t =$

structure à symétrie axiale

définition

structure créée par révolution fermée
d'une génératrice



structure à symétrie axiale

définition

structure créée par révolution fermée
d'une génératrice

caractéristiques mathématiques

- cas limite des structures à symétrie cyclique
- matrices masse et raideur circulantes
- invariance par rapport à un axe de rotation
- modes doubles à diamètres
 - fréquence et forme identiques
 - orthogonaux



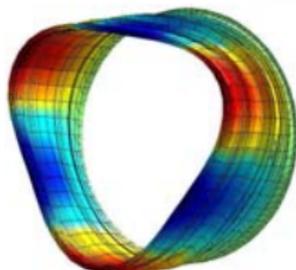
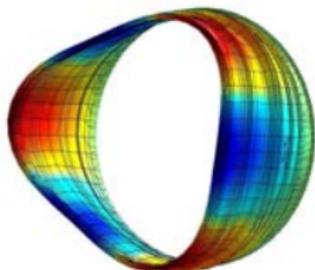
structure à symétrie axiale

définition

structure créée par révolution fermée
d'une génératrice

caractéristiques mathématiques

- cas limite des structures à symétrie cyclique
- matrices masse et raideur circulantes
- invariance par rapport à un axe de rotation
- modes doubles à diamètres



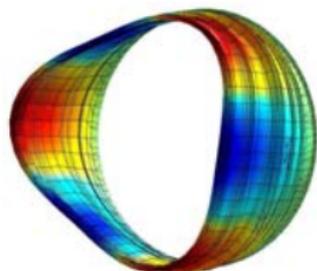
structure à symétrie axiale

définition

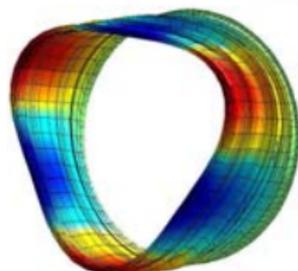
structure créée par révolution fermée
d'une génératrice

caractéristiques mathématiques

- cas limite des structures à symétrie cyclique
- matrices masse et raideur circulantes
- invariance par rapport à un axe de rotation
- modes doubles à diamètres



$\cos \omega t +$

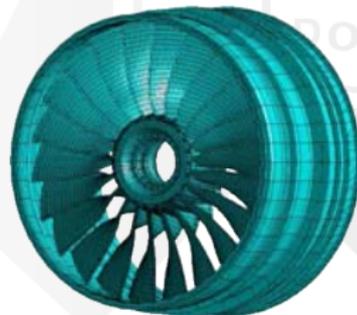


$\sin \omega t =$

enjeux industriels

efficacité

- réduction des coûts : moins d'étages plus chargés
- minimisation du jeu entre les parties tournantes et fixes
- possibilités de contacts entre les structures



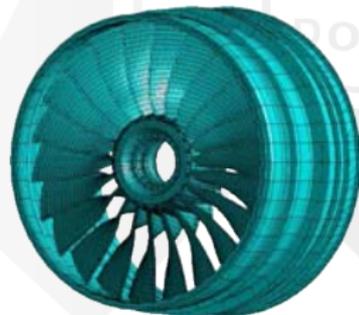
problèmes de sécurité

- possibilité d'auto-excitation des modes tournants par contacts
- éviter toute résonance vibratoire des structures
- interaction inattendue à cause du contact

enjeux industriels

efficacité

- réduction des coûts : moins d'étages plus chargés
- minimisation du jeu entre les parties tournantes et fixes
- possibilités de contacts entre les structures



problèmes de sécurité

- possibilité d'auto-excitation des modes tournants par contacts
- éviter toute résonance vibratoire des structures
- interaction inattendue à cause du contact

étude de l'interaction rotor/stator dans un moteur d'avion

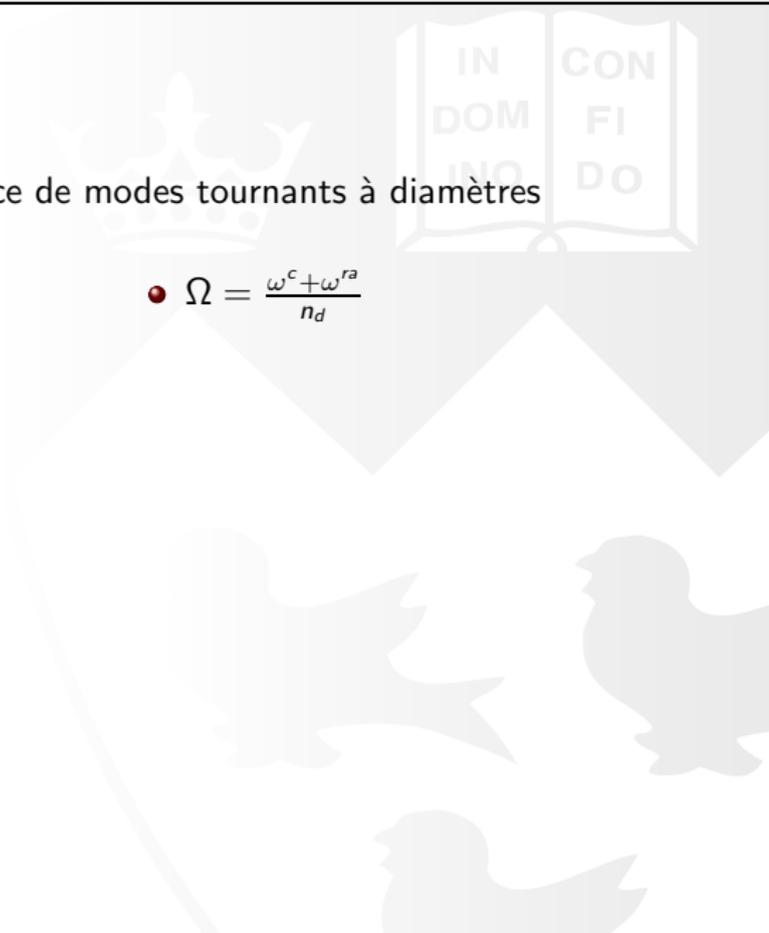
interaction modale

définition

coïncidence vibratoire en résonance de modes tournants à diamètres

- $\Omega = 0$

- $\Omega = \frac{\omega^c + \omega^{ra}}{n_d}$



interaction modale

définition

coïncidence vibratoire en résonance de modes tournants à diamètres

- $\Omega = 0$

- $\Omega = \frac{\omega^c + \omega^{ra}}{n_d}$

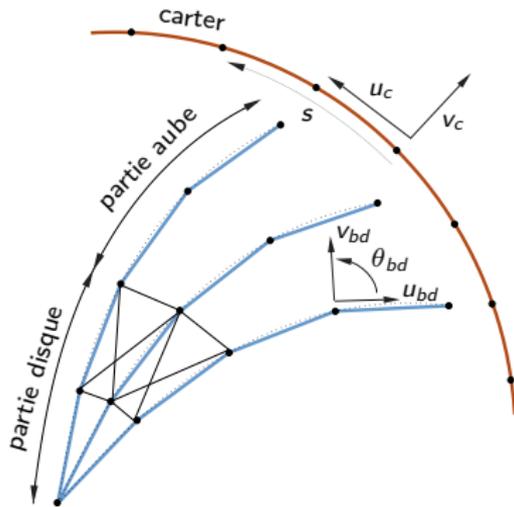
Condition de coïncidence modale

$$\Omega = \frac{\omega_c + \omega_{ra}}{n}$$

ω_{ra} : pulsation propre de la roue aubagée
 ω_c : pulsation propre du carter
 n : nombre de diamètres nodaux

présentation du modèle

principe



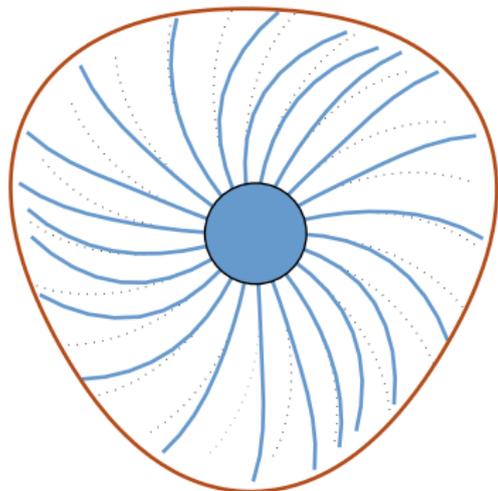
caractéristiques

- aube = éléments poutre-barre droits
- aube à géométrie courbe à l'équilibre
- couplage flexion/traction
- frottement en sommet d'aube
- disque = réseau de raideurs

- carter = éléments poutre courbe 4 ddl par nœud
- gestion du contact sur toute section du carter

présentation du modèle

modes à 3 diamètres



caractéristiques

- aube = éléments poutre-barre droits
- aube à géométrie courbe à l'équilibre
- couplage flexion/traction
- frottement en sommet d'aube
- disque = réseau de raideurs

- carter = éléments poutre courbe 4 ddl par nœud
- gestion du contact sur toute section du carter

discrétisation

principe des travaux virtuels

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = \underbrace{\int_{\Gamma_c} t_N \delta g + \mathbf{t}_T \delta \mathbf{u}_T \, dS}_{\text{terme de contact}} + \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}_d \delta \mathbf{u} \, dS$$

+ contraintes sur les efforts de contact t_N et \mathbf{t}_T

méthode explicite : différences finies centrées

$$\ddot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - 2\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t^2} \quad \dot{\mathbf{u}}_n = \frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n-1}}{2\Delta t}$$

contraintes de contact : multiplicateurs de Lagrange

- frottement : surface du cône de Coulomb
- algorithme de type prédiction - correction en déplacement

compléments mathématiques

- ➊ **prédiction** des déplacements :

$$\mathbf{u}^{n+1,p} = \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\mathbf{D}}{2h} \right]^{-1} \left(\left(\frac{2\mathbf{M}}{h^2} - \mathbf{K} \right) \mathbf{u}^n + \left(\frac{\mathbf{D}}{2h} - \frac{\mathbf{M}}{h^2} \right) \mathbf{u}^{n-1} + \mathbf{F}^n \right)$$

- ➋ **détermination** du vecteur "distances de pénétration" \mathbf{g}^p :

$$\mathbf{g}^p \geq 0$$

- ➌ **correction** des déplacements :

$$\mathbf{g}^{n+1} = \mathbf{C}_N^t \mathbf{u}^{n+1,c} + \mathbf{g}^p = \mathbf{0}$$

$$\lambda = \left(\mathbf{C}_N^t \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\mathbf{D}}{2h} \right]^{-1} \mathbf{C}_{NT} \right)^{-1} \mathbf{d}^p$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n+1,p} + \left[\frac{\mathbf{M}}{h^2} + \frac{\mathbf{D}}{2h} \right]^{-1} \mathbf{C}_{NT} \lambda$$

IN
DOM
INO

CON
FI
DO

algorithme général

entrées paramètres n , Ω , h , nb aubes... , conditions initiales

pour $t = t_i$ à t_f **faire**

prédiction des déplacements dans le domaine modal

projection des déplacements dans le domaine physique

calcul des distances entre les aubes et le carter

si pénétration détectée **alors**

calcul des multiplicateurs de Lagrange (direction normale)

calcul des efforts de frottement : frontière du cône de Coulomb

correction des déplacements

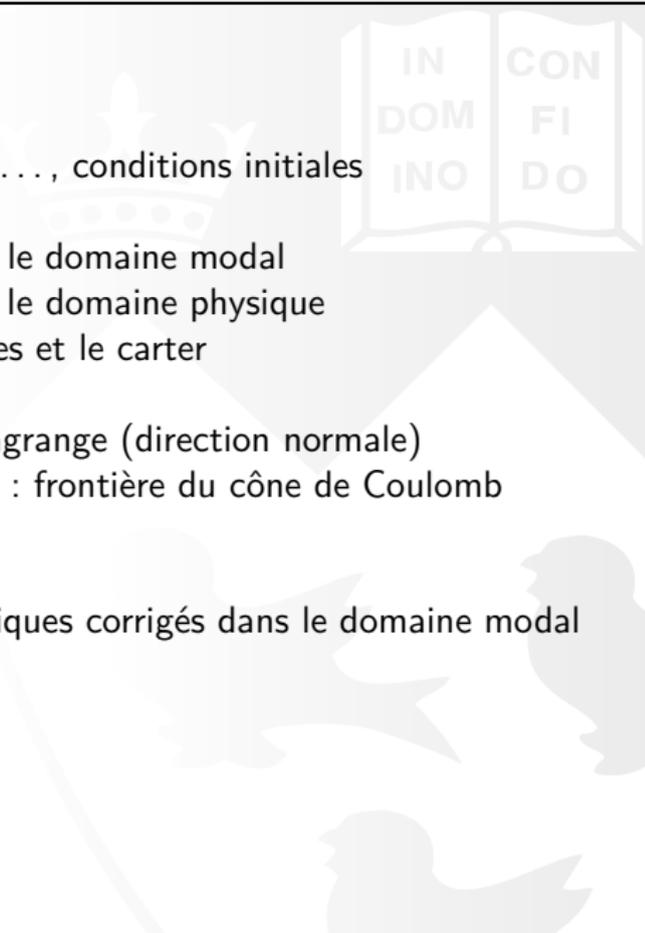
fin si

projection des déplacements physiques corrigés dans le domaine modal

incrémentation du pas de temps

fin pour

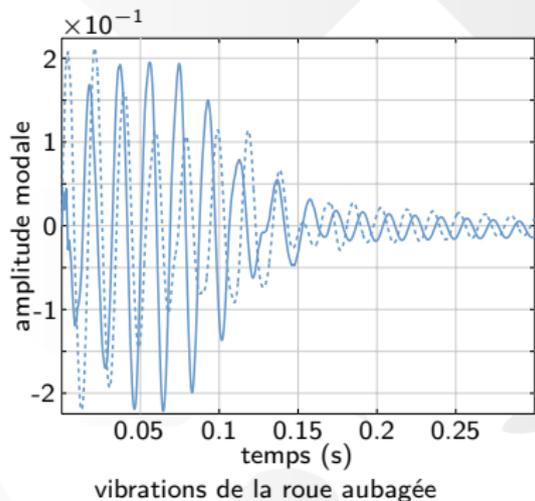
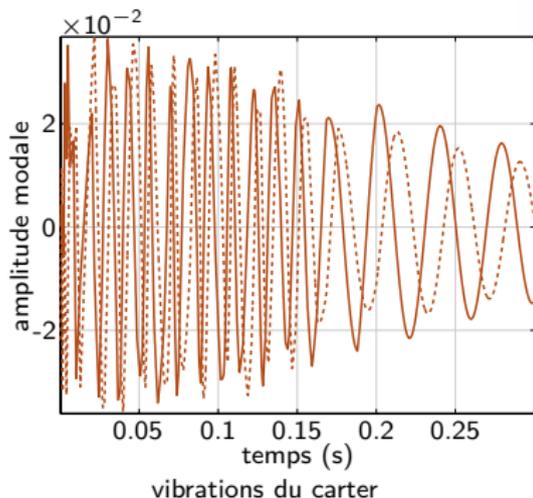
sorties affichage des résultats



comportement du système : $n_d = 2$

deux types de réponse en fonction de Ω

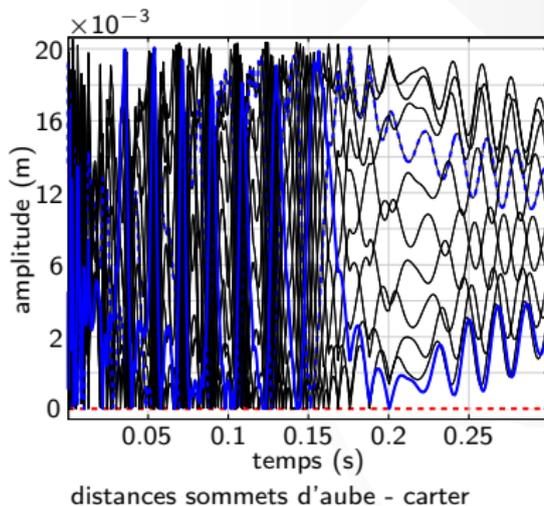
- quelques impacts et fin de l'interaction si $\Omega < \Omega_c$
- comportement de type "mouvement bloqué" si $\Omega > \Omega_c$



comportement du système : $n_d = 2$

deux types de réponse en fonction de Ω

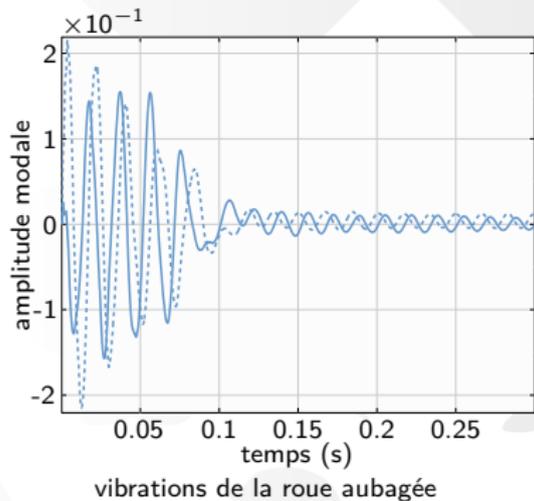
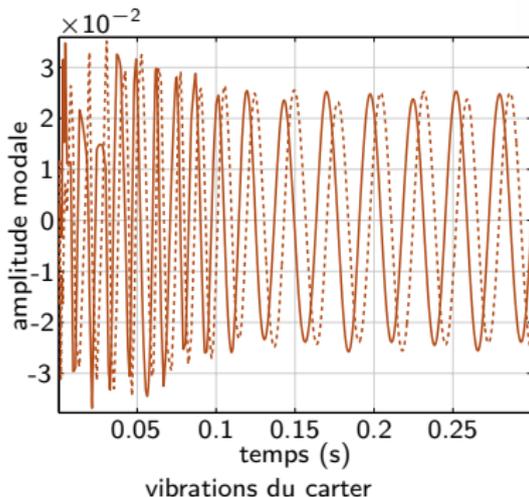
- quelques impacts et fin de l'interaction si $\Omega < \Omega_c$
- comportement de type "mouvement bloqué" si $\Omega > \Omega_c$



comportement du système : $n_d = 2$

deux types de réponse en fonction de Ω

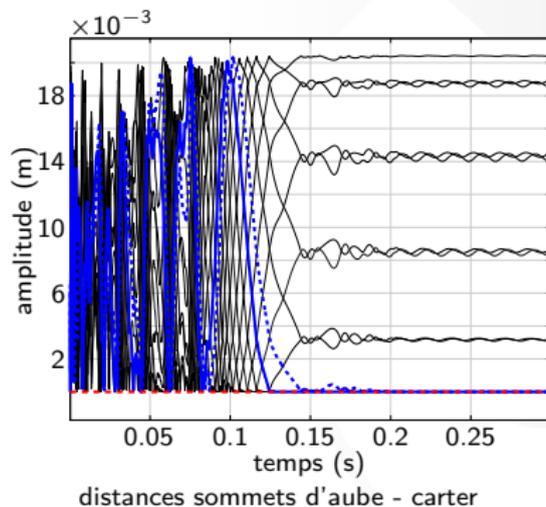
- quelques impacts et fin de l'interaction si $\Omega < \Omega_c$
- comportement de type "mouvement bloqué" si $\Omega > \Omega_c$



comportement du système : $n_d = 2$

deux types de réponse en fonction de Ω

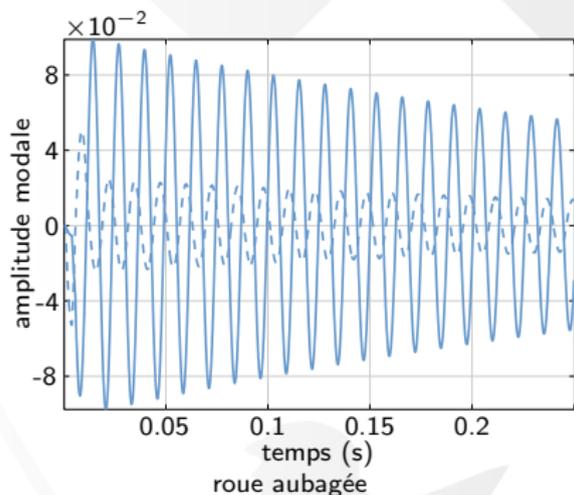
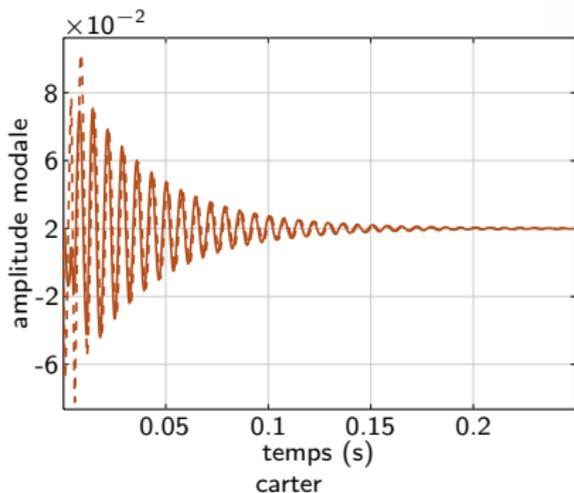
- quelques impacts et fin de l'interaction si $\Omega < \Omega_c$
- comportement de type "mouvement bloqué" si $\Omega > \Omega_c$



comportement du système : $n_d = 4$

trois types de réponse en fonction de Ω

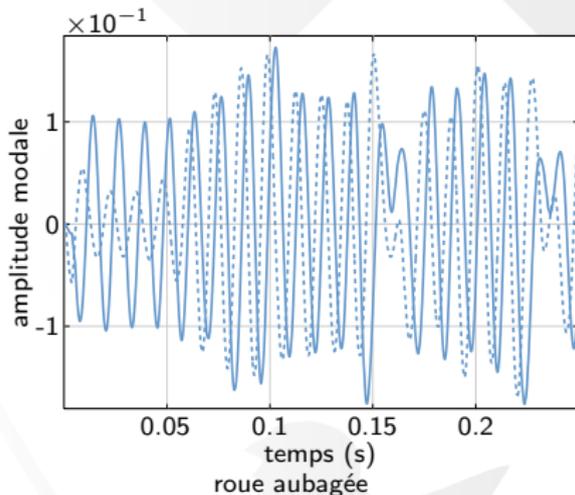
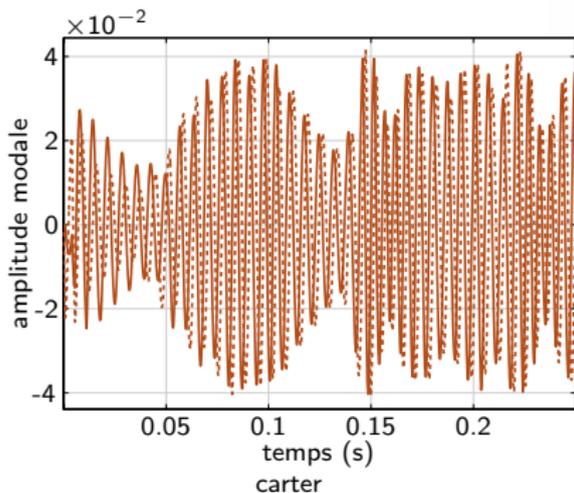
- quelques impacts et fin de l'interaction si $\Omega < \Omega_c$
- cycle limite quasi-périodique des deux structures si $\Omega \simeq \Omega_c$
- divergence des amplitudes après quelques tours moteur si $\Omega > \Omega_c$



comportement du système : $n_d = 4$

trois types de réponse en fonction de Ω

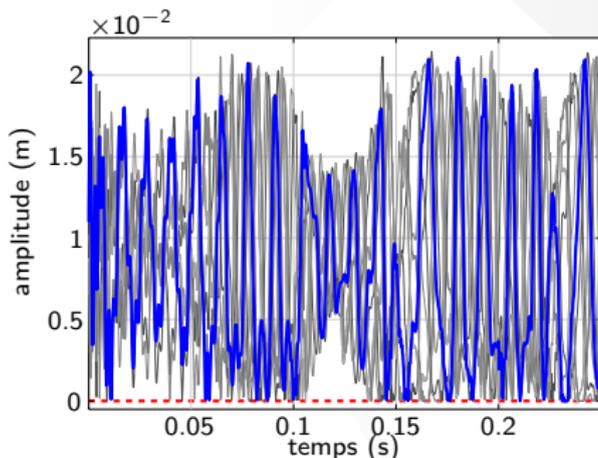
- quelques impacts et fin de l'interaction si $\Omega < \Omega_c$
- cycle limite quasi-périodique des deux structures si $\Omega \simeq \Omega_c$
- divergence des amplitudes après quelques tours moteur si $\Omega > \Omega_c$



comportement du système : $n_d = 4$

trois types de réponse en fonction de Ω

- quelques impacts et fin de l'interaction si $\Omega < \Omega_c$
- **cycle limite quasi-périodique des deux structures si $\Omega \simeq \Omega_c$**
- divergence des amplitudes après quelques tours moteur si $\Omega > \Omega_c$

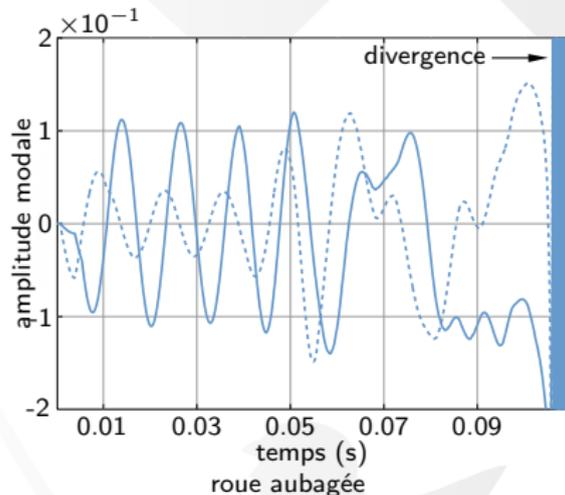
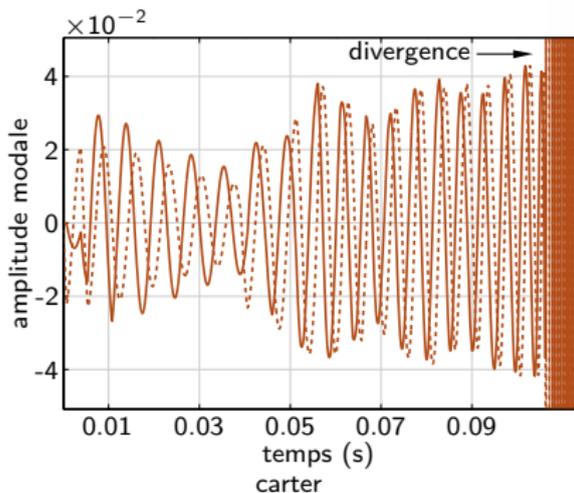


distances carter - sommets d'aube

comportement du système : $n_d = 4$

trois types de réponse en fonction de Ω

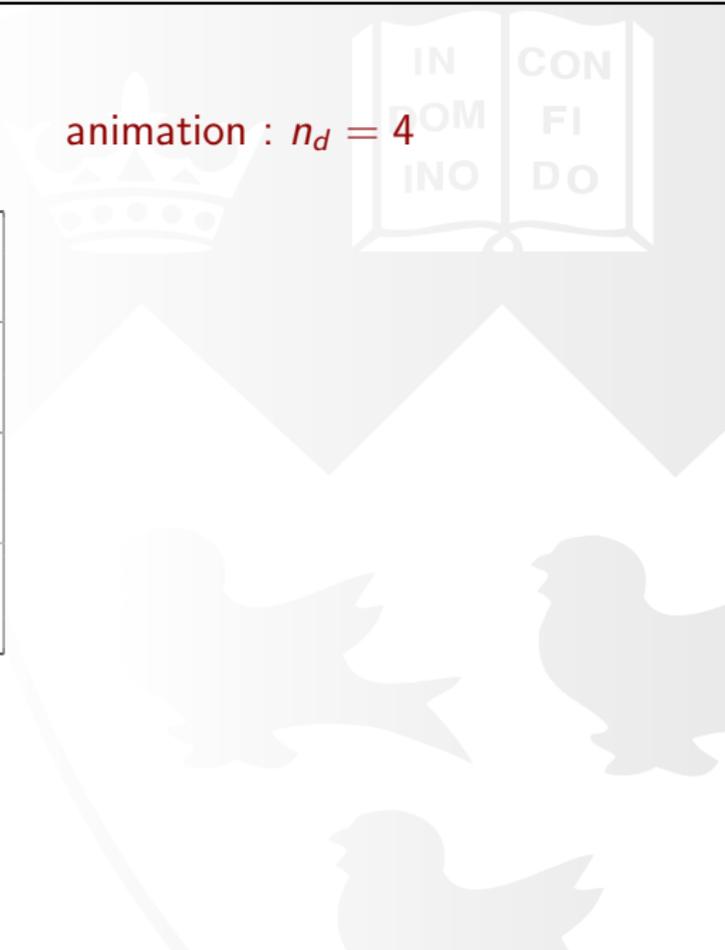
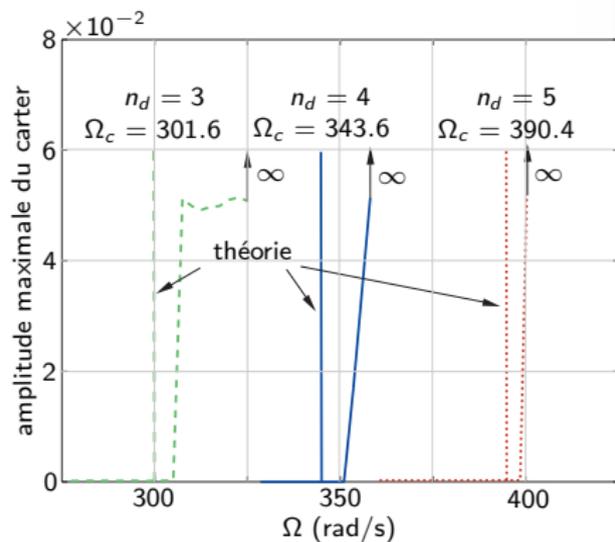
- quelques impacts et fin de l'interaction si $\Omega > \Omega_c$
- cycle limite quasi-périodique des deux structures si $\Omega \simeq \Omega_c$
- **divergence des amplitudes après quelques tours moteur si $\Omega > \Omega_c$**



compléments

théorie/outil numérique

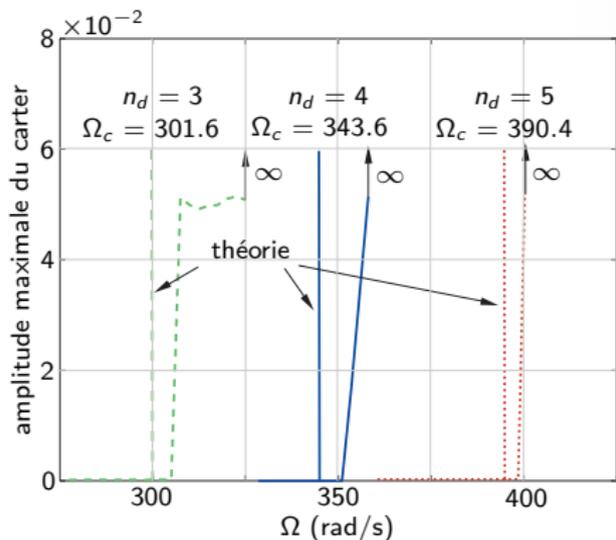
animation : $n_d = 4$



compléments

théorie/outil numérique

animation : $n_d = 4$

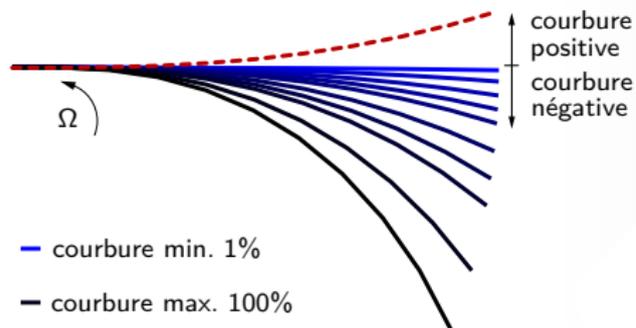


interaction si $\Omega \geq \frac{\omega_c + \omega_{ra}}{n}$



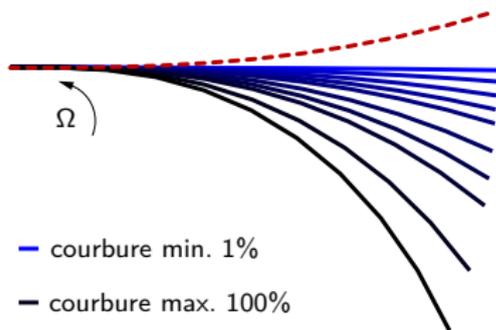
courbure des aubes

géométries testées

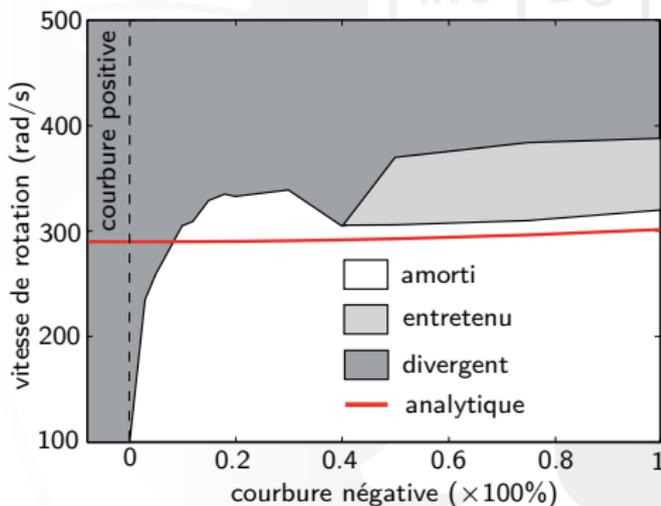


courbure des aubes

géométries testées

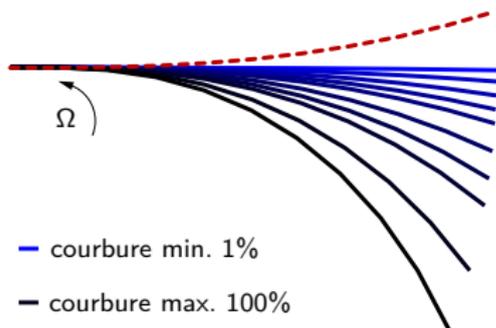


zones de divergence

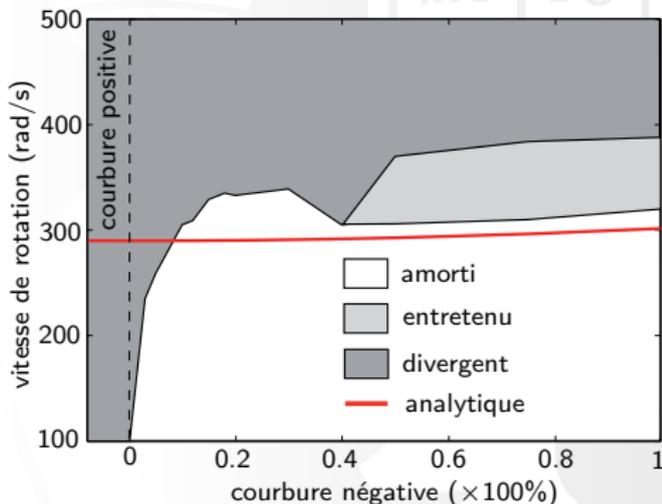


courbure des aubes

géométries testées

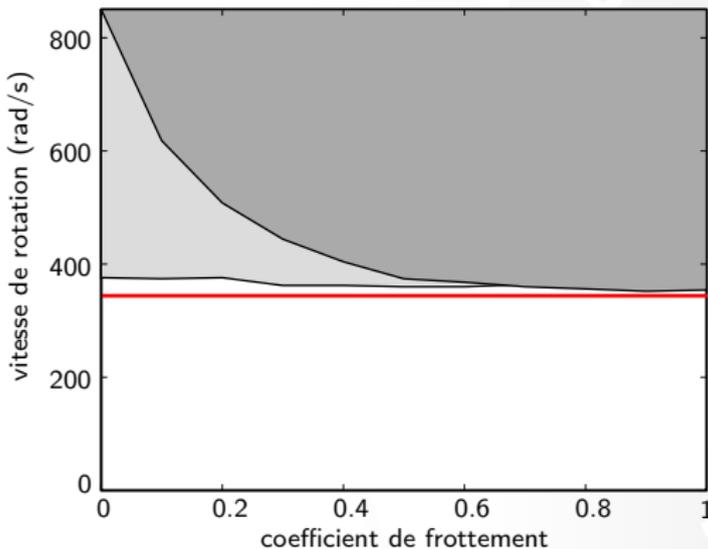


zones de divergence

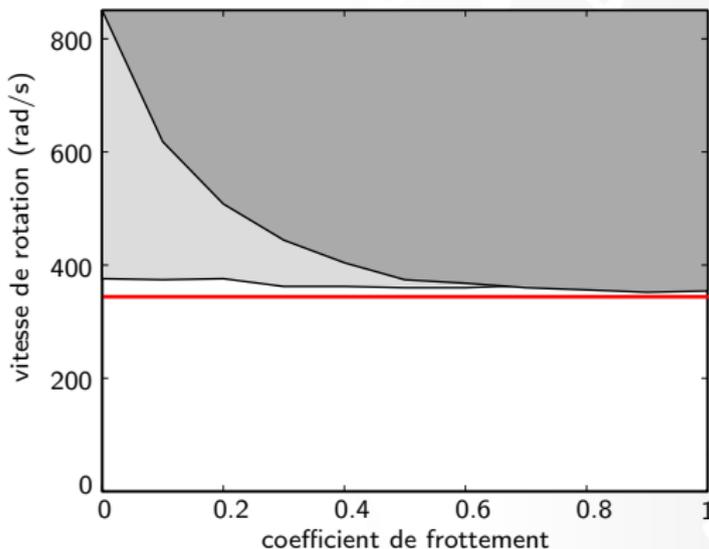


sensibilité des aubes de nouvelle technologie à courbure avant ?

sensibilité au coefficient de frottement



sensibilité au coefficient de frottement



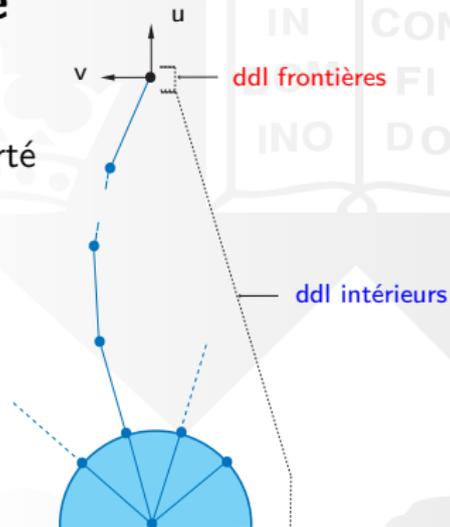
- en accord avec les considérations analytiques
- renforcement de l'instabilité

méthodes de synthèse modale

stratégie

partition du déplacement sur les degrés de liberté

frontières et intérieurs



méthodes de synthèse modale

stratégie

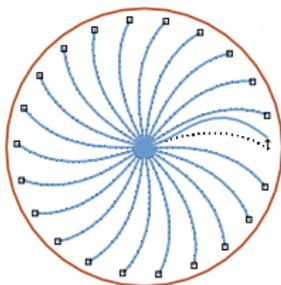
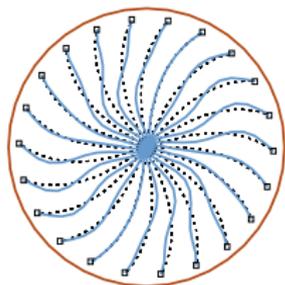
partition du déplacement sur les degrés de liberté

frontières et intérieurs

deux approches différentes

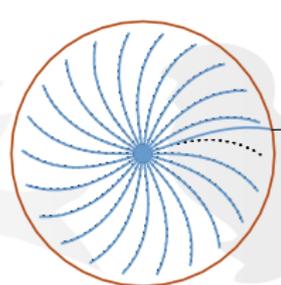
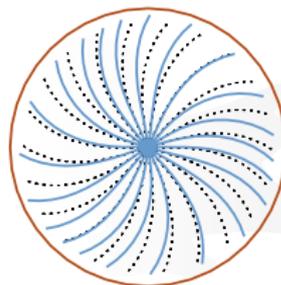
interface fixe : Craig-Bampton

interface libre : Craig-Chang-Martinez



(e) m. à interface fixe

(f) modes contraints



(g) m. à interface libre

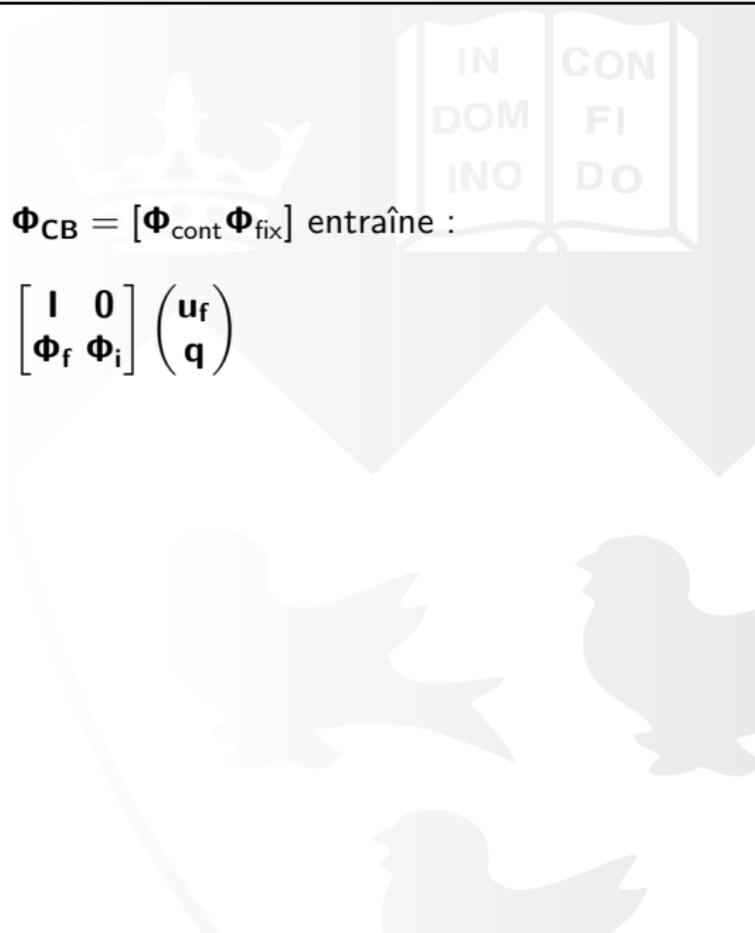
(h) modes d'attache

aperçu théorique

Craig-Bampton

La matrice de changement de base $\Phi_{CB} = [\Phi_{cont} \Phi_{fix}]$ entraîne :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_f & \Phi_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$$



aperçu théorique

Craig-Bampton

La matrice de changement de base $\Phi_{CB} = [\Phi_{\text{cont}} \Phi_{\text{fix}}]$ entraîne :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \Phi_f & \Phi_i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

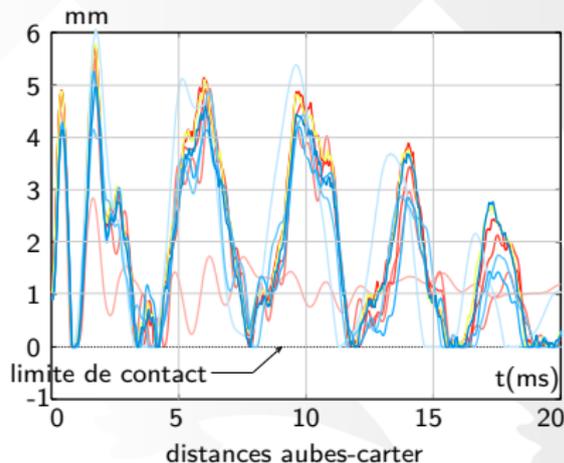
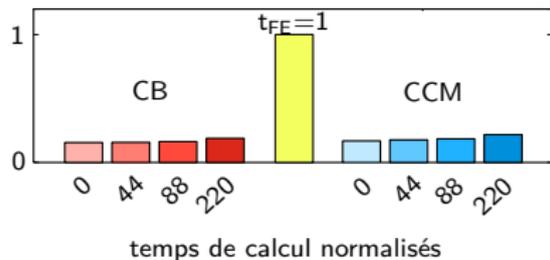
Craig-Chang-Martinez

les modes à interfaces libres et les modes d'attache (méthode de Craig-Chang) ne permettent pas un accès direct aux déplacements physiques des nœuds frontières : utilisation de la matrice de flexibilité résiduelle statique

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{u}_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{ff} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_i \mathbf{R}_f^{-1} \Phi_{1i} & -\mathbf{R}_i \mathbf{R}_f^{-1} \Phi_{1f} \end{bmatrix}}_{\Phi_{CCM}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_f \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}$$

premiers résultats

- les deux méthodes donnent des résultats similaires
- la convergence semble être plus rapide pour la méthode de Craig-Bampton
- détection de la même vitesse d'interaction



conclusions intermédiaires

- grâce au modèle 2D, détection de
 - $n_d = 2$: interaction (non divergente) si :

$$\Omega \geq \frac{\omega_c}{n_d}$$

- $n_d > 2$: interaction (divergente) si :

$$\Omega \geq \frac{\omega_c + \omega_{bd}}{n_d}$$

- dépendance nombre de diamètres nodaux - nombre d'aubes
- méthodes de synthèse
 - en accord avec le modèle 2D non réduit
 - rapides
 - préliminaires aux approches 3D
- études paramétriques du phénomène
 - rôle de l'amortissement structural
 - sensibilité au désaccordage



conclusions intermédiaires

- grâce au modèle 2D, détection de
 - $n_d = 2$: interaction (non divergente) si :

$$\Omega \geq \frac{\omega_c}{n_d}$$

- $n_d > 2$: interaction (divergente) si :

$$\Omega \geq \frac{\omega_c + \omega_{bd}}{n_d}$$

théorie :

$$\Omega = \frac{\omega_c + \omega_{bd}}{n_d}$$

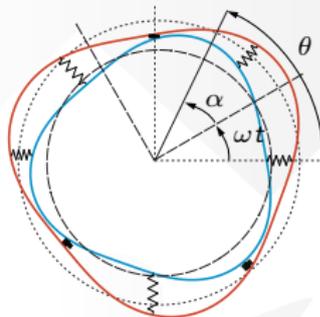
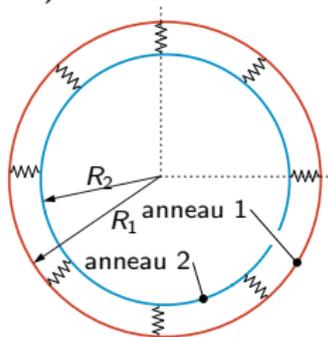
- dépendance nombre de diamètres nodaux - nombre d'aubes
- méthodes de synthèse
 - en accord avec le modèle 2D non réduit
 - rapides
 - préliminaires aux approches 3D
- études paramétriques du phénomène
 - rôle de l'amortissement structural
 - sensibilité au désaccordage



présentation du système

description modale

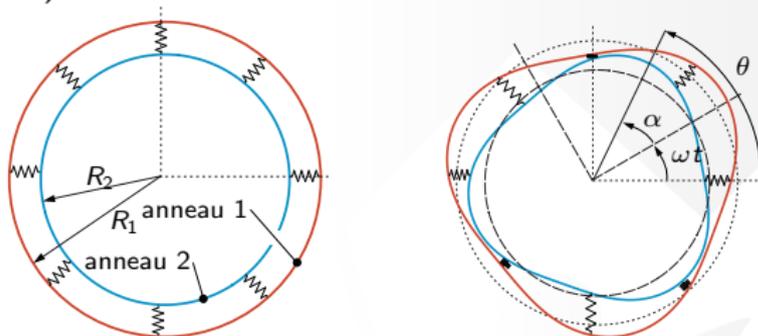
deux anneaux flexibles (carter et roue aubagée) connectés par des raideurs (linéaires ou non)



présentation du système

description modale

deux anneaux flexibles (carter et roue aubagée) connectés par des raideurs (linéaires ou non)



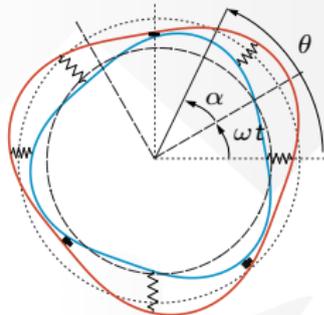
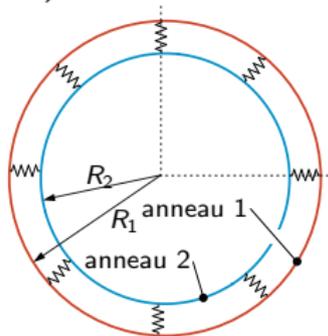
champ de déplacement

- anneau 1 : $u(\theta, t) = u_c(t) \cos(n\theta) + u_s(t) \sin(n\theta)$
- anneau 2 : $v(\alpha, t) = v_c(t) \cos(m\alpha) + v_s(t) \sin(m\alpha)$
- $\theta = \omega t + \alpha$

présentation du système

description modale

deux anneaux flexibles (carter et roue aubagée) connectés par des raideurs (linéaires ou non)



champ de déplacement

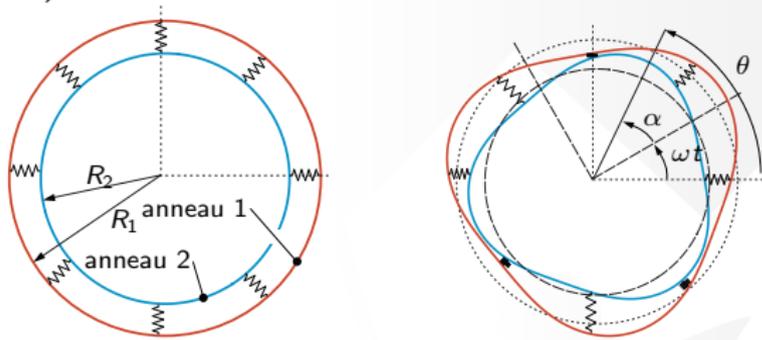
- anneau 1 : $u(\theta, t) = u_c(t) \cos(n\theta) + u_s(t) \sin(n\theta)$
- anneau 2 : $v(\alpha, t) = v_c(t) \cos(m\alpha) + v_s(t) \sin(m\alpha)$
- $\theta = \omega t + \alpha$

4 inconnues

présentation du système

description modale

deux anneaux flexibles (carter et roue aubagée) connectés par des raideurs (linéaires ou non)



champ de déplacement

- anneau 1 : $u(\theta, t) = u_c(t) \cos(n\theta) + u_s(t) \sin(n\theta)$
- anneau 2 : $v(\alpha, t) = v_c(t) \cos(m\alpha) + v_s(t) \sin(m\alpha)$
- $\theta = \omega t + \alpha$

nombre de diamètres : ici $n = m$

équations du mouvement

espace modal initial

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_s \\ \ddot{v}_c \\ \ddot{v}_s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_u^2 + \varepsilon^2 & 0 & -\varepsilon^2 C & \varepsilon^2 S \\ 0 & \Omega_u^2 + \varepsilon^2 & -\varepsilon^2 S & -\varepsilon^2 C \\ -\varepsilon^2 C & -\varepsilon^2 S & \Omega_v^2 + \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 S & -\varepsilon^2 C & 0 & \Omega_v^2 + \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_s \\ v_c \\ v_s \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{u}_s \\ \dot{v}_c \\ \dot{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_u \Phi_1 \\ -K_u \Phi_2 \\ K_v \Phi_3 \\ K_v \Phi_4 \end{pmatrix}$$

où

- ε : raideur de couplage
- $C = \cos(\Omega t)$
- $S = \sin(\Omega t)$
- $\Omega = n\omega$
- Φ_j : fonctions non linéaires dépendant de u_c , u_s , v_c et v_s

équations du mouvement

espace modal initial

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_s \\ \ddot{v}_c \\ \ddot{v}_s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_u^2 + \varepsilon^2 & 0 & -\varepsilon^2 C & \varepsilon^2 S \\ 0 & \Omega_u^2 + \varepsilon^2 & -\varepsilon^2 S & -\varepsilon^2 C \\ -\varepsilon^2 C & -\varepsilon^2 S & \Omega_v^2 + \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 S & -\varepsilon^2 C & 0 & \Omega_v^2 + \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_s \\ v_c \\ v_s \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{u}_s \\ \dot{v}_c \\ \dot{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_u \Phi_1 \\ -K_u \Phi_2 \\ K_v \Phi_3 \\ K_v \Phi_4 \end{pmatrix}$$

équations de mathieu couplées (et non linéaires)

équations du mouvement

espace modal initial

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_s \\ \ddot{v}_c \\ \ddot{v}_s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_u^2 + \varepsilon^2 & 0 & -\varepsilon^2 C & \varepsilon^2 S \\ 0 & \Omega_u^2 + \varepsilon^2 & -\varepsilon^2 S & -\varepsilon^2 C \\ -\varepsilon^2 C & -\varepsilon^2 S & \Omega_v^2 + \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 S & -\varepsilon^2 C & 0 & \Omega_v^2 + \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_s \\ v_c \\ v_s \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{u}_s \\ \dot{v}_c \\ \dot{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_u \Phi_1 \\ -K_u \Phi_2 \\ K_v \Phi_3 \\ K_v \Phi_4 \end{pmatrix}$$

changement de base

$$\begin{pmatrix} u_c \\ u_s \\ v_c \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \frac{\Omega t}{2} & \cos \frac{\Omega t}{2} \\ 0 & 0 & -\cos \frac{\Omega t}{2} & \sin \frac{\Omega t}{2} \\ \sin \frac{\Omega t}{2} & -\cos \frac{\Omega t}{2} & 0 & 0 \\ \cos \frac{\Omega t}{2} & \sin \frac{\Omega t}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

équations du mouvement

espace modal initial

$$\begin{pmatrix} \ddot{u}_c \\ \ddot{u}_s \\ \ddot{v}_c \\ \ddot{v}_s \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_u^2 + \varepsilon^2 & 0 & -\varepsilon^2 C & \varepsilon^2 S \\ 0 & \Omega_u^2 + \varepsilon^2 & -\varepsilon^2 S & -\varepsilon^2 C \\ -\varepsilon^2 C & -\varepsilon^2 S & \Omega_v^2 + \varepsilon^2 & 0 \\ \varepsilon^2 S & -\varepsilon^2 C & 0 & \Omega_v^2 + \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_s \\ v_c \\ v_s \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} \dot{u}_c \\ \dot{u}_s \\ \dot{v}_c \\ \dot{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_u \Phi_1 \\ -K_u \Phi_2 \\ K_v \Phi_3 \\ K_v \Phi_4 \end{pmatrix}$$

équations différentielles à coefficients constants (cas linéaire)

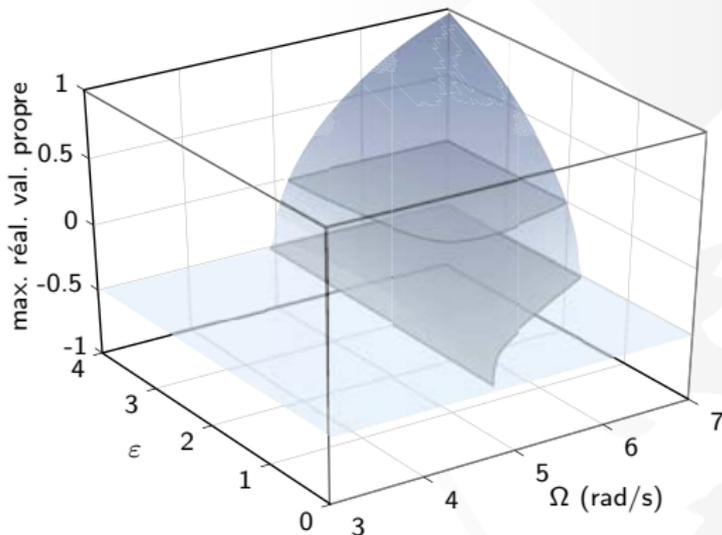
$$\begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \\ \ddot{X}_3 \\ \ddot{X}_4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \delta & \Omega & 0 & 0 \\ -\Omega & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -\Omega \\ 0 & 0 & \Omega & \delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_v & \frac{\delta\Omega}{2} & \varepsilon^2 & 0 \\ -\frac{\delta\Omega}{2} & \Delta_v & 0 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 0 & \Delta_u & -\frac{\delta\Omega}{2} \\ 0 & \varepsilon^2 & \frac{\delta\Omega}{2} & \Delta_u \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\Delta_u = \Omega_u^2 + \varepsilon^2 - \frac{\Omega^2}{4}$ et $\Delta_v = \Omega_v^2 + \varepsilon^2 - \frac{\Omega^2}{4}$

résultats pour le système linéaire

analyse modale

- étude des valeurs propres λ_i du système en fonction de certains paramètres : ici ε et Ω
- instabilité si $\max[\Re(\lambda_i)] > 0$



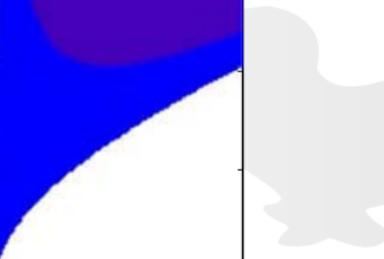
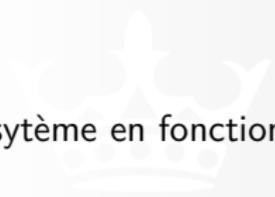
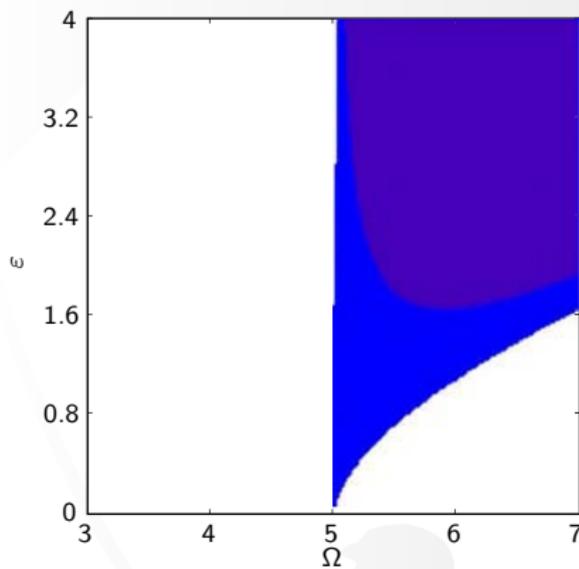
résultats pour le système linéaire

analyse modale

- étude des valeurs propres λ_i du système en fonction de certains paramètres : ici ε et Ω
- instabilité si $\max[\Re(\lambda_i)] > 0$

instabilité paramétrique

une seule zone d'instabilité de type combinatoire



résultats pour le système linéaire

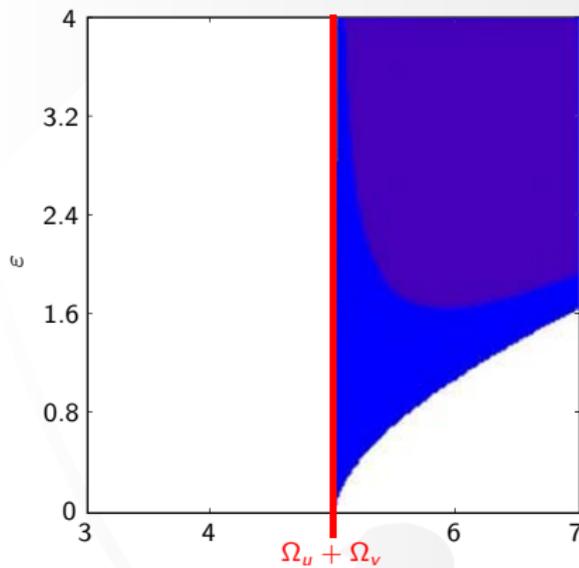
analyse modale

- étude des valeurs propres λ_i du système en fonction de certains paramètres : ici ε et Ω
- instabilité si $\max[\Re(\lambda_i)] > 0$

instabilité paramétrique

une seule zone d'instabilité de type combinatoire **centrée sur** :

$$\Omega = \Omega_u + \Omega_v$$

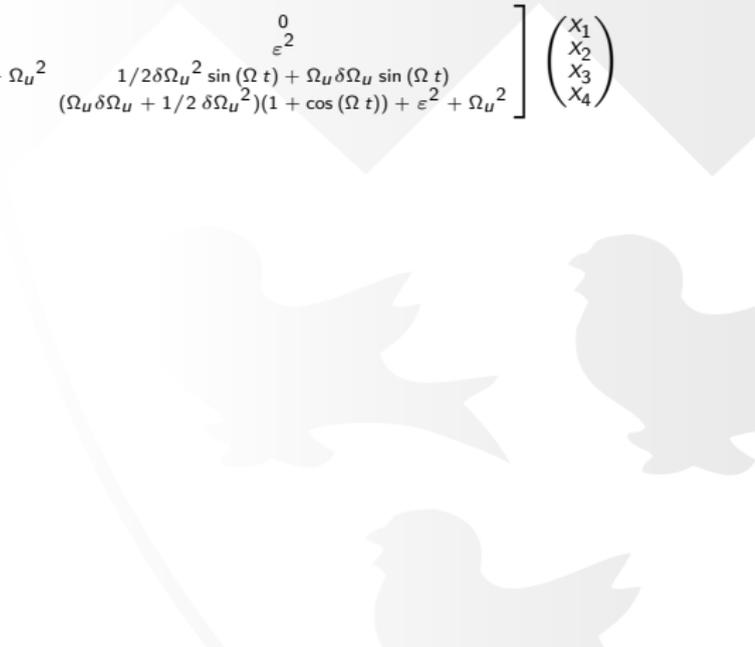
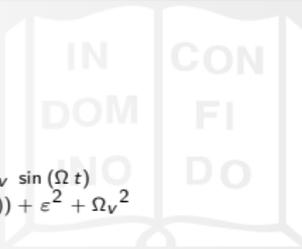


ajout de désaccordage

équations à coefficients périodiques

$$\begin{bmatrix}
 (\Omega_V \delta \Omega_V + 1/2 \delta \Omega_V^2)(1 - \cos(\Omega t)) + \varepsilon^2 + \Omega_V^2 & -1/2 \delta \Omega_V^2 \sin(\Omega t) - \Omega_V \delta \Omega_V \sin(\Omega t) \\
 -1/2 \delta \Omega_V^2 \sin(\Omega t) - \Omega_V \delta \Omega_V \sin(\Omega t) & (\Omega_V \delta \Omega_V + 1/2 \delta \Omega_V^2)(1 + \cos(\Omega t)) + \varepsilon^2 + \Omega_V^2 \\
 \varepsilon^2 & 0 \\
 0 & \varepsilon^2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 X_1 \\
 X_2 \\
 X_3 \\
 X_4
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 (\Omega_U \delta \Omega_U + 1/2 \delta \Omega_U^2)(1 - \cos(\Omega t)) + \varepsilon^2 + \Omega_U^2 & 1/2 \delta \Omega_U^2 \sin(\Omega t) + \Omega_U \delta \Omega_U \sin(\Omega t) \\
 1/2 \delta \Omega_U^2 \sin(\Omega t) + \Omega_U \delta \Omega_U \sin(\Omega t) & (\Omega_U \delta \Omega_U + 1/2 \delta \Omega_U^2)(1 + \cos(\Omega t)) + \varepsilon^2 + \Omega_U^2 \\
 \varepsilon^2 & 0 \\
 0 & \varepsilon^2
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 X_1 \\
 X_2 \\
 X_3 \\
 X_4
 \end{bmatrix}$$



ajout de désaccordage

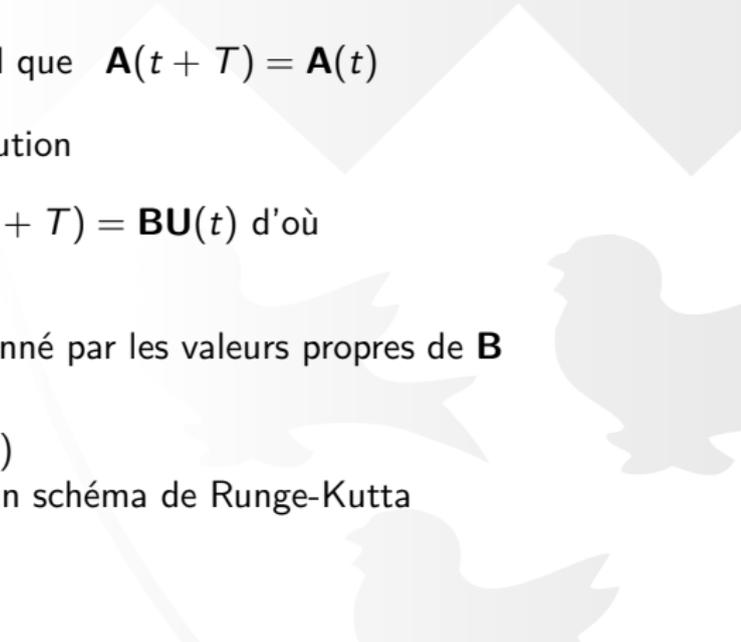
équations à coefficients périodiques

théorie de Floquet

- système d'équations dans l'espace des phases

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{U} \quad \text{tel que} \quad \mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t)$$

- $\mathbf{U}(t)$ solution $\implies \mathbf{U}(t+T)$ solution
- $\exists \mathbf{B}$ non singulière telle que $\mathbf{U}(t+T) = \mathbf{B}\mathbf{U}(t)$ d'où
 $\mathbf{U}(t+nT) = \mathbf{B}^n\mathbf{U}(t)$
- comportement de la solution donné par les valeurs propres de \mathbf{B}
- calcul de \mathbf{B} :
 prendre $\mathbf{U}(0) = \mathbf{I}$ soit $\mathbf{B} = \mathbf{U}(T)$
 intégration numérique grâce à un schéma de Runge-Kutta

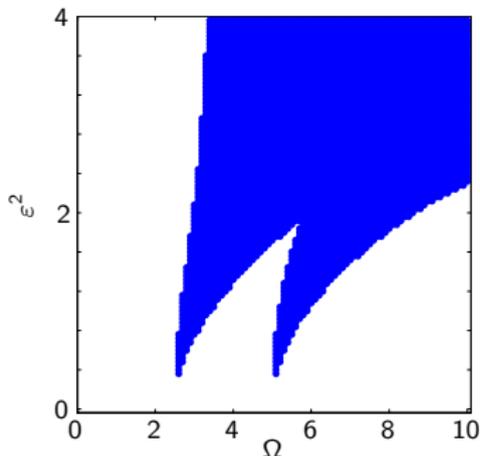


ajout de désaccordage

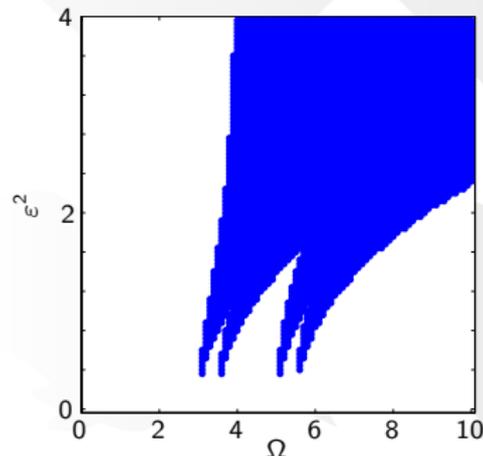
équations à coefficients périodiques

théorie de Floquet

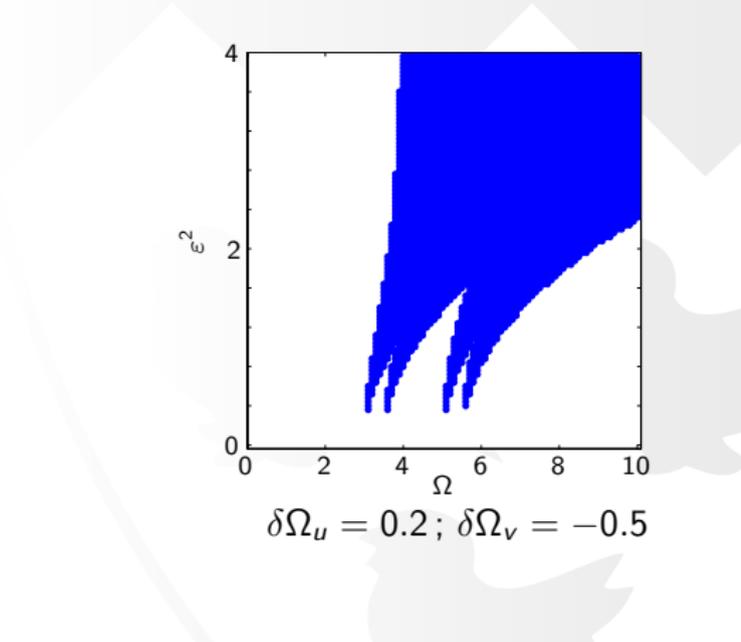
résultats



$$\delta\Omega_u = 0; \delta\Omega_v = -0.6$$



$$\delta\Omega_u = 0.2; \delta\Omega_v = -0.5$$

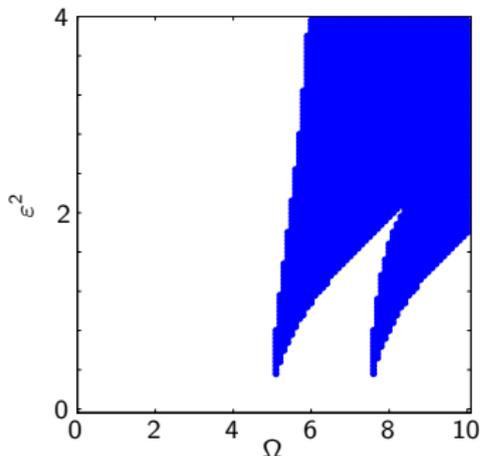


ajout de désaccordage

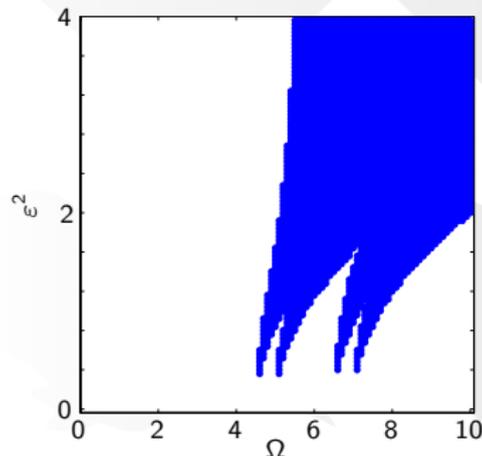
équations à coefficients périodiques

théorie de Floquet

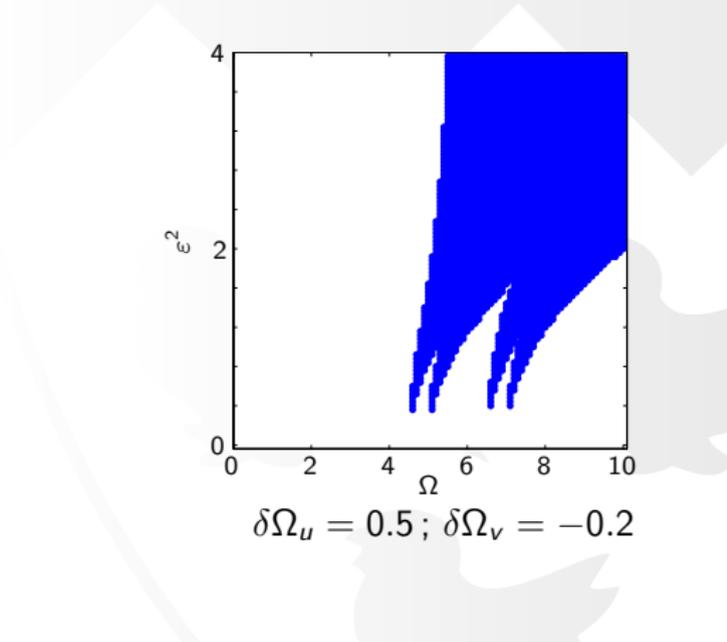
résultats



$$\delta\Omega_u = 0.6; \delta\Omega_v = 0$$



$$\delta\Omega_u = 0.5; \delta\Omega_v = -0.2$$



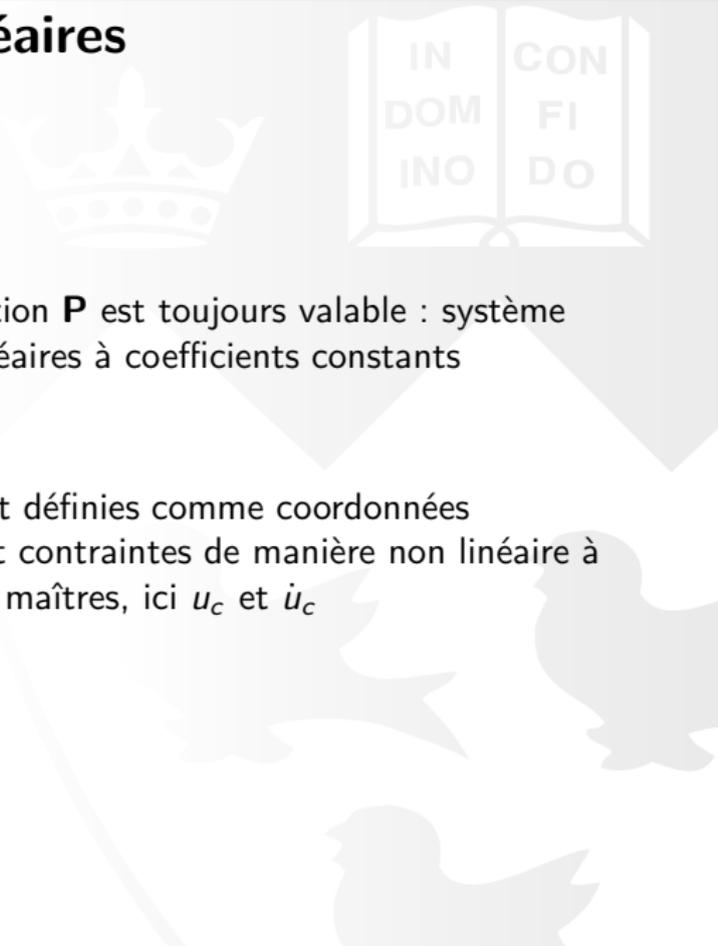
quelques modes non linéaires

non linéarité

- couplage linéaire et cubique
- dans ce cas précis, la transformation **P** est toujours valable : système d'équations différentielles non linéaires à coefficients constants

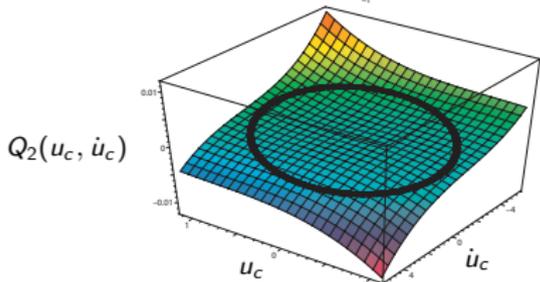
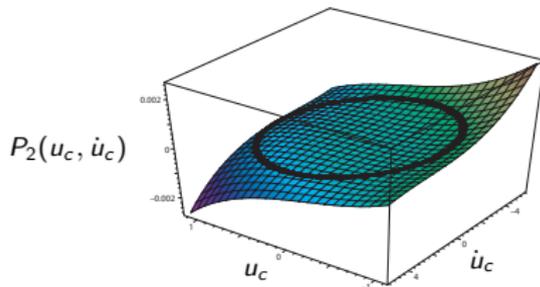
formulation

certaines coordonnées du système sont définies comme coordonnées “maîtres” et les autres “esclaves” sont contraintes de manière non linéaire à suivre le mouvement des coordonnées maîtres, ici u_c et \dot{u}_c



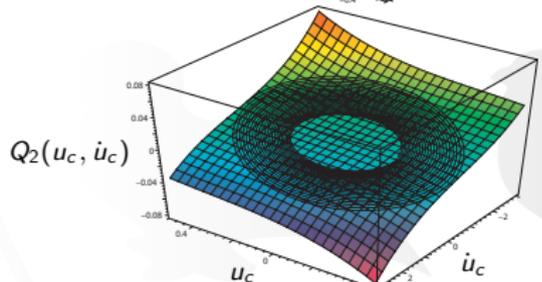
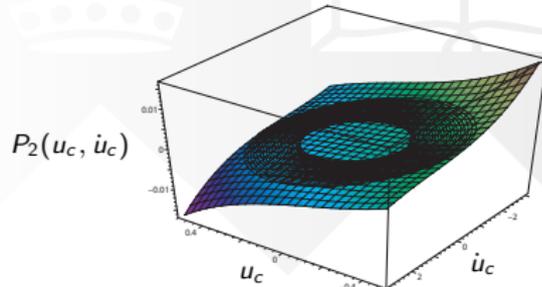
quelques modes non linéaires

modes stables



$$\varepsilon = 0.01, \Omega = 4.5, \delta = 0.1, \Omega_u = 3, \Omega_v = 2$$

modes instables



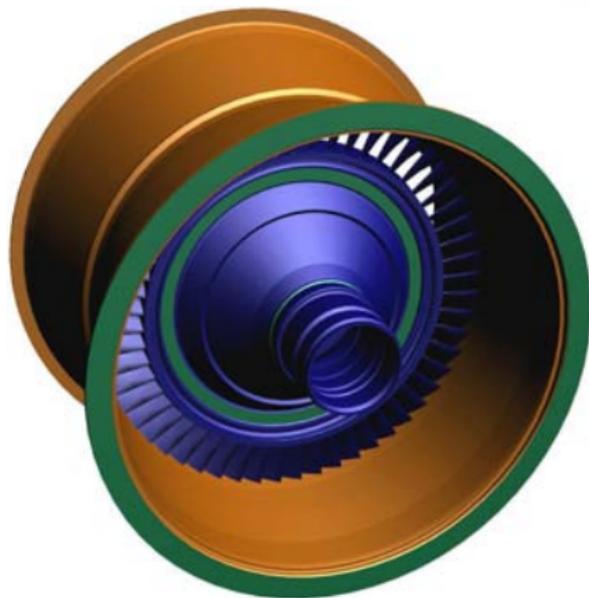
$$\varepsilon = 0.6, \Omega = 5, \delta = 0.1, \Omega_u = 3, \Omega_v = 2$$

conclusions intermédiaires

- contient intrinsèquement la condition d'interaction
- meilleure compréhension du phénomène
 - différents types de non linéarité
 - approche modes non linéaires dans certains cas
 - sensibilité à un paramètre : bifurcation
 - sensibilité au désaccordage
- enrichissement du champ de déplacement
 - couplage des modes par la non linéarité
 - nouvelles vitesses critiques ?
- ajout d'usure : équations différentielles à retard ?



présentation



roue aubagée

- 56 aubes
- $\simeq 1,000,000$ ddl
- éléments volumiques : tétraèdrons et hexaèdrons quadratiques

carter

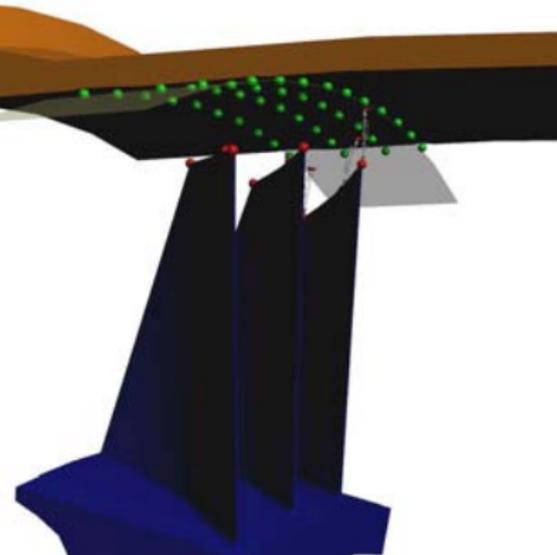
- $\simeq 200,000$ ddl
- éléments briques quadratiques

compléments

- pas de désaccordage
- encastrement
- pas d'efforts centrifuge



stratégie



réduction de modèle

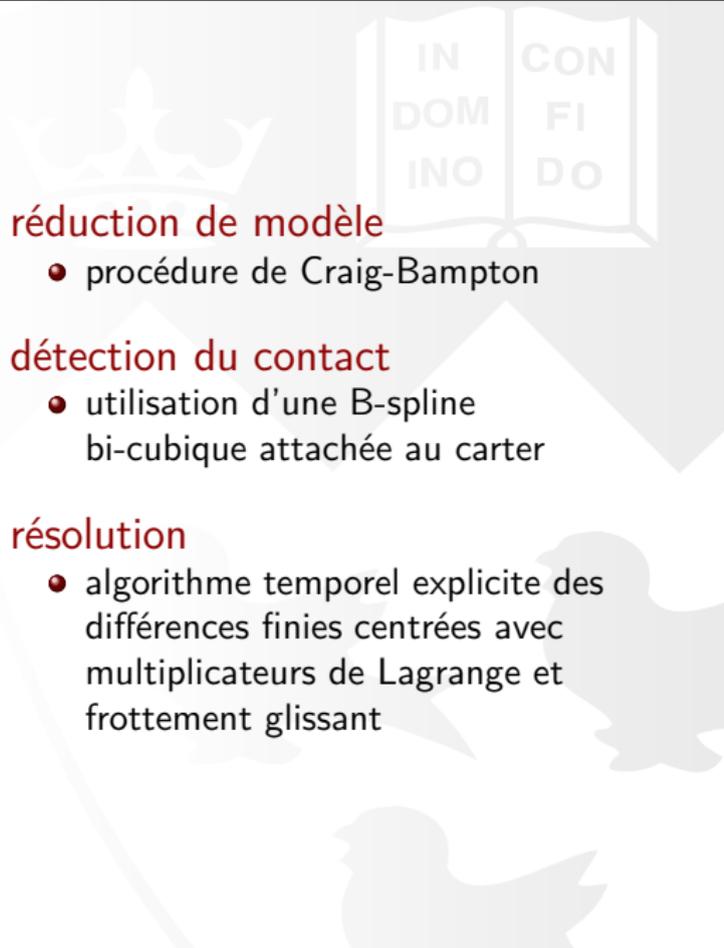
- procédure de Craig-Bampton

détection du contact

- utilisation d'une B-spline bi-cubique attachée au carter

résolution

- algorithme temporel explicite des différences finies centrées avec multiplicateurs de Lagrange et frottement glissant

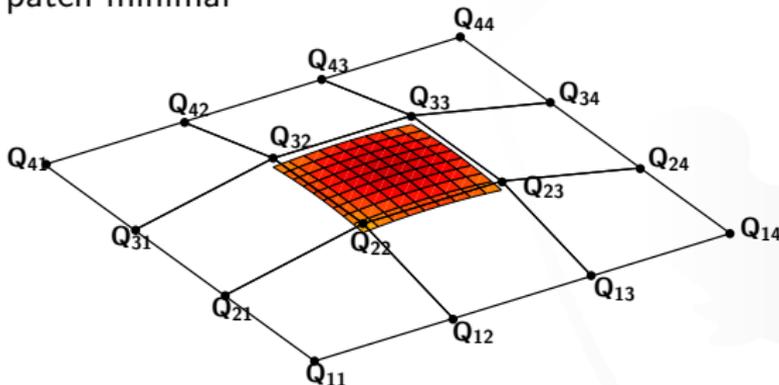


formulation de la spline surfacique

- surface paramétrique à support local :

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^{N_u-1} \sum_{j=0}^{N_v-1} Q_{ij} B_{ni}(u) B_{nj}(v) \quad (1)$$

- patch minimal



- *expression retenue : bi-cubique uniforme*



expression matricielle

- produit tensoriel (voir éq.(1))

$$S(u, v) = \frac{1}{36} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}^T \mathbf{V} \quad (2)$$

- vecteurs

$$\mathbf{U}^T = [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \quad \text{et} \quad \mathbf{V}^T = [v^3 \ v^2 \ v \ 1] \quad (3)$$

- matrices

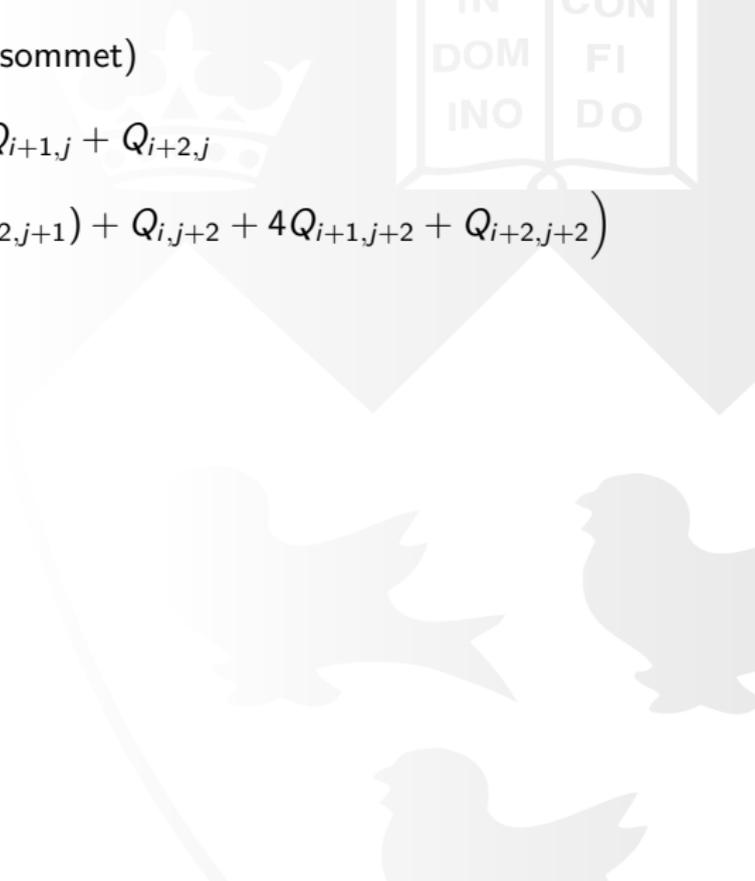
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{i,j} & Q_{i,j+1} & Q_{i,j+2} & Q_{i,j+3} \\ Q_{i+1,j} & Q_{i+1,j+1} & Q_{i+1,j+2} & Q_{i+1,j+3} \\ Q_{i+2,j} & Q_{i+2,j+1} & Q_{i+2,j+2} & Q_{i+2,j+3} \\ Q_{i+3,j} & Q_{i+3,j+1} & Q_{i+3,j+2} & Q_{i+3,j+3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

interpolation de points

- patch de 4 sommets (premier sommet)

$$S(0,0) = P_{i,j} = \frac{1}{36} \left(Q_{i,j} + 4Q_{i+1,j} + Q_{i+2,j} \right. \\ \left. + 4(Q_{i,j+1} + 4Q_{i+1,j+1} + Q_{i+2,j+1}) + Q_{i,j+2} + 4Q_{i+1,j+2} + Q_{i+2,j+2} \right)$$



interpolation de points

- patch de 4 sommets (premier sommet)

$$S(0,0) = P_{i,j} = \frac{1}{36} \left(Q_{i,j} + 4Q_{i+1,j} + Q_{i+2,j} \right. \\ \left. + 4(Q_{i,j+1} + 4Q_{i+1,j+1} + Q_{i+2,j+1}) + Q_{i,j+2} + 4Q_{i+1,j+2} + Q_{i+2,j+2} \right)$$

- matrice de passage entre **P** et **Q**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_u \otimes \mathbf{B}_v \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}_v \otimes \mathbf{B}_u$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$$



interpolation de points

- patch de 4 sommets (premier sommet)

$$S(0,0) = P_{i,j} = \frac{1}{36} \left(Q_{i,j} + 4Q_{i+1,j} + Q_{i+2,j} \right. \\ \left. + 4(Q_{i,j+1} + 4Q_{i+1,j+1} + Q_{i+2,j+1}) + Q_{i,j+2} + 4Q_{i+1,j+2} + Q_{i+2,j+2} \right)$$

- matrice de passage entre **P** et **Q**

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_u \otimes \mathbf{B}_v \quad \text{ou} \quad \mathbf{A} = \mathbf{B}_v \otimes \mathbf{B}_u$$

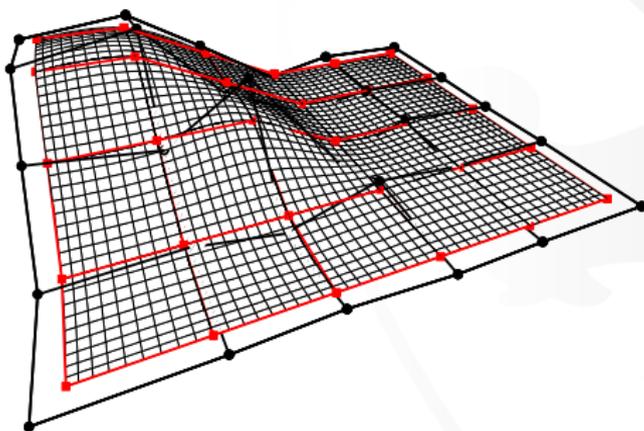
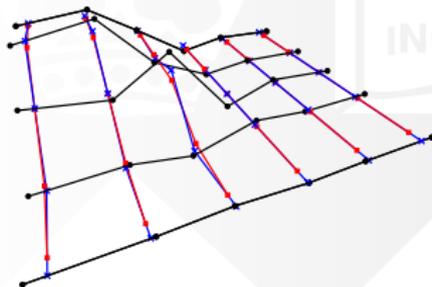
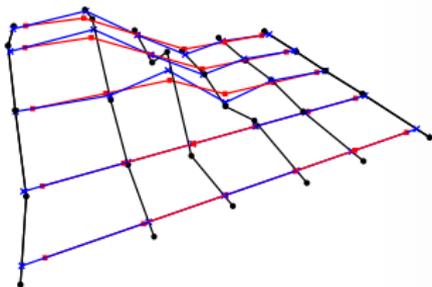
$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$$

- expressions

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{B}_v = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & & & \\ \vdots & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ & 0 & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \vdots & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$



interpolation de points



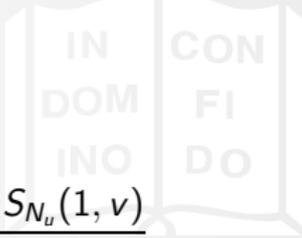
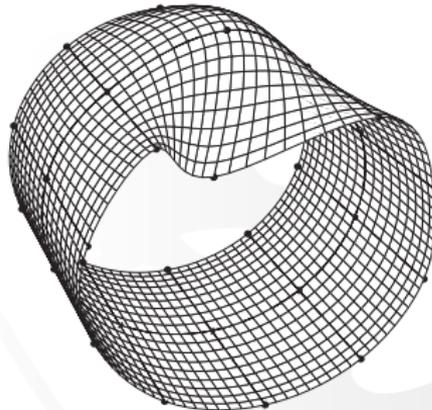
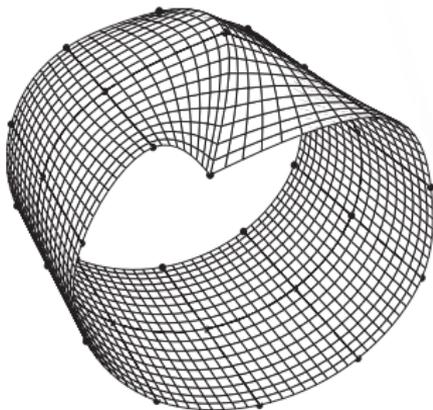
conditions de continuité

- conditions de continuité circonférencielle

$$\frac{\partial S_0(0, \nu)}{\partial u} = \frac{\partial S_{N_u}(1, \nu)}{\partial u} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 S_0(0, \nu)}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 S_{N_u}(1, \nu)}{\partial u^2}$$

- conditions sur les bords libres : pente tangente au polynôme de contrôle

$$Q_{i,0} = Q_{i,1}; \quad Q_{i,n+1} = Q_{i,n} \quad i = 0, 1, \dots, m + 1$$



mécanique du contact

éléments théoriques

- pressions admissibles C_N :

$$C_N = \{t_N : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{R} \setminus t_N \geq 0\} \quad (6)$$

- efforts tangentiels admissibles C_T :

$$C_T(t_N) = \{\mathbf{t}_T : \Gamma_c \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbf{t}_T \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ et } \|\mathbf{t}_T\| \leq \mu t_N\} \quad (7)$$

- Principe des Travaux Virtuels

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV = \int_{\Gamma_c} (t_N \delta g + \mathbf{t}_T \delta \mathbf{u}_T) \, dS +$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{f}_d \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{t}_d \delta \mathbf{u} \, dS$$

où les pressions de contact t_N et les efforts de frottement \mathbf{t}_T sont contraints par les conditions (6) et (7)

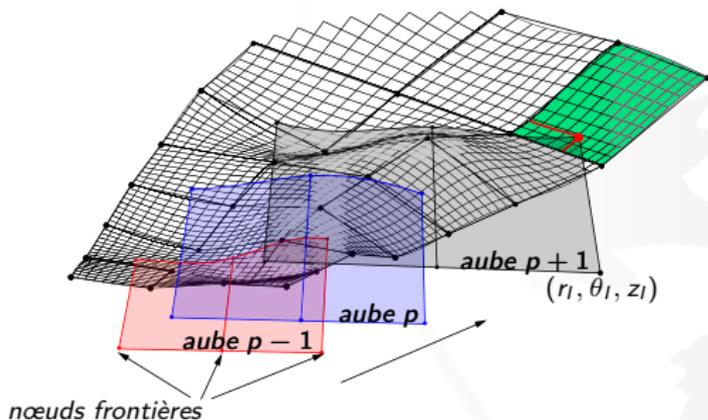


mécanique du contact

éléments théoriques

gestion du contact par splines surfaciques

- formulation consistante avec le principe des travaux virtuels
 - champ de déplacement virtuel de la spline
 - passage entre points de donnée et les points de contrôle lors du calcul des champs de déplacement en tout point de la spline
- détermination de l'élément de la spline potentiellement en contact

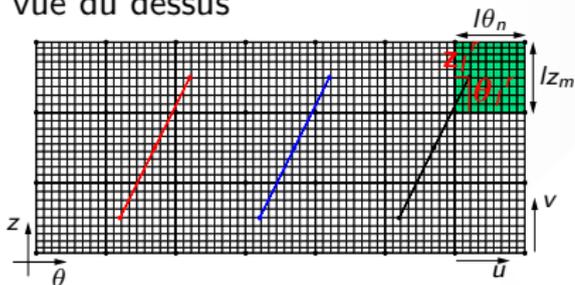


mécanique du contact

éléments théoriques

gestion du contact par splines surfaciques

- vue du dessus



- équations

$$S(u, v) = (r(u, v), \theta(u, v), z(u, v)) \quad (6)$$

trouver u_c et v_c tel que $\theta(u_c, v_c) = \theta_l^r$ et $z(u_c, v_c) = z_l^r$ avec :

$$\theta_l^r = \theta_l - \sum_{i=1}^{n-1} l\theta_i \quad \text{et} \quad z_l^r = z_l - \sum_{j=1}^{m-1} lz_j \quad (7)$$



cadre de l'étude

paramètres mécaniques

	m. cont.	m. comp.	amort.
carter	1200	η_c	$\xi_c = 3\%$
roue aubagée	504	η_{ra}	$\xi_{ra} = 0,5\%$

gradient de température

$$F_\theta(\theta) = \cos(2\theta)$$

$$F_t(t) = 1 - e^{-at^2}$$

● distribution spatiale

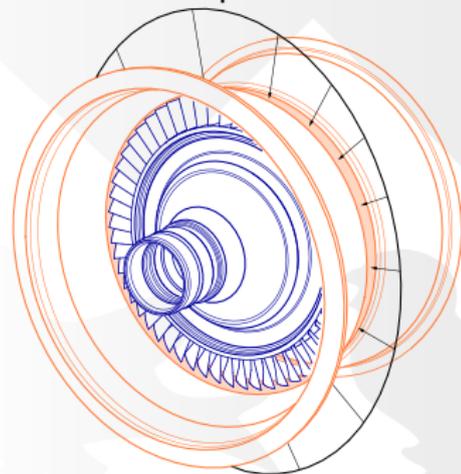
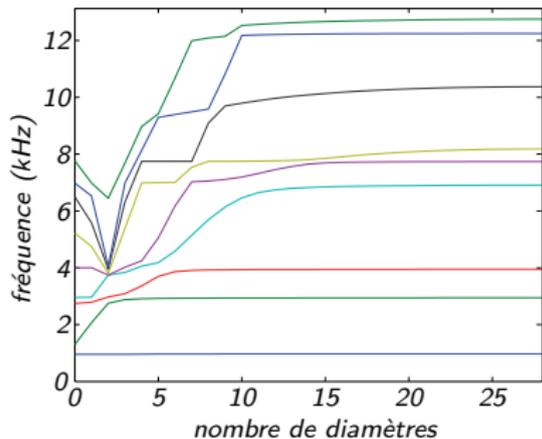


diagramme diamètres-fréquence

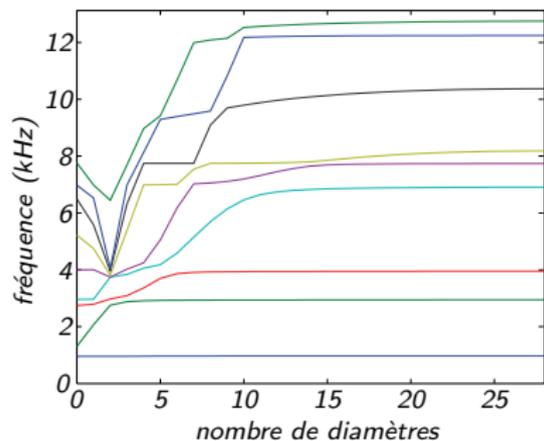


cadre de l'étude

paramètres mécaniques

	m. cont.	m. comp.	amort.
carter	1200	η_c	$\xi_c = 3\%$
roue aubagée	504	η_{ra}	$\xi_{ra} = 0,5\%$

diagramme diamètres-fréquence

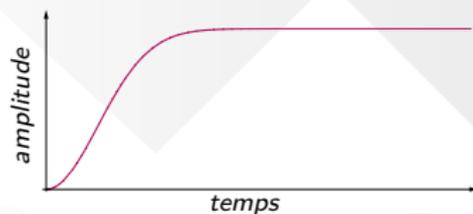


gradient de température

$$F_\theta(\theta) = \cos(2\theta)$$

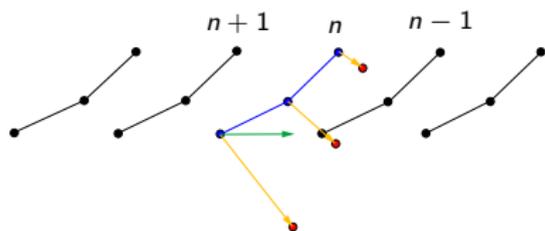
$$F_t(t) = 1 - e^{-at^2}$$

● contribution temporelle

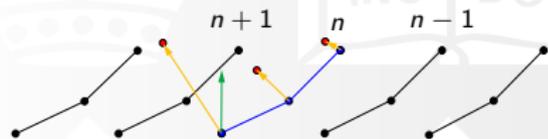


vérification du modèle

déformée statique de la roue aubagée



chargement dans la direction \vec{e}_θ



chargement dans la direction \vec{e}_z

propagation d'onde sur le carter

pas de temps optimal

critère de Courant

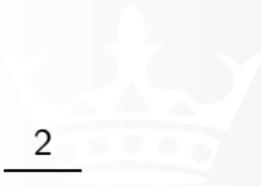
$$h \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad (8)$$

où ω_{max} , valeur propre maximale du système :

- carter : $\omega_{max} = 1,73 \cdot 10^6$, soit $h \leq 1,15 \cdot 10^{-6}s$
- roue aubagée : $\omega_{max} = 2,86 \cdot 10^6$, soit $h \leq 6,99 \cdot 10^{-7}s$

point de vue non linéaire

$$h \simeq 10^{-7}s \quad (9)$$



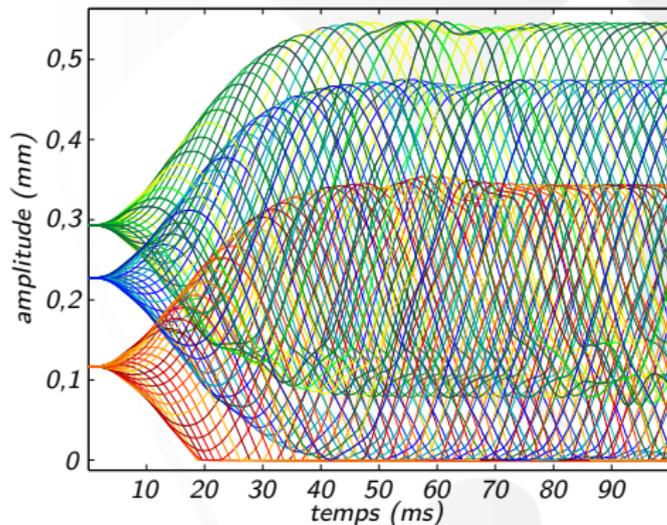
pas de temps optimal

critère de Courant

point de vue non linéaire

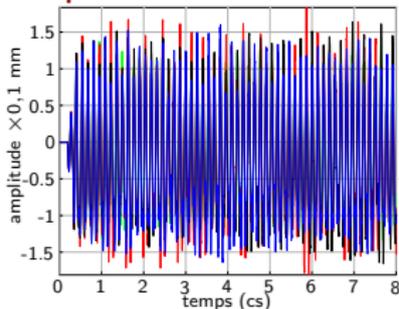
distances sommets d'aube-carter

- $\mu = 0,2$
- $\Omega = 500$ rad/s

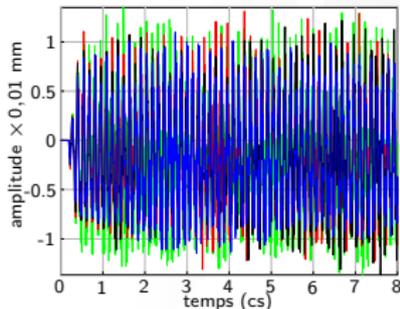


convergence non linéaire ($\Omega = 366$ Hz, $n = 2$, $\mu = 0,2$)

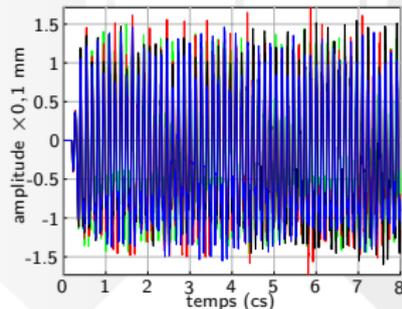
déplacement des nœuds frontières : en contact



direction radiale

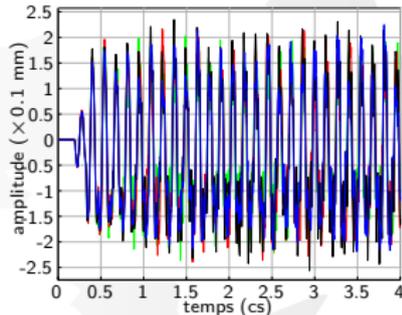
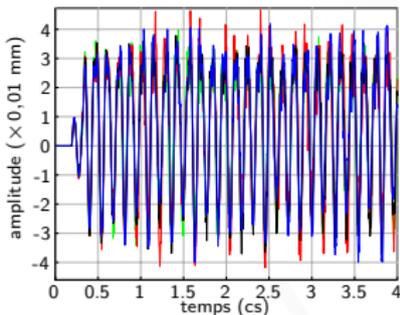
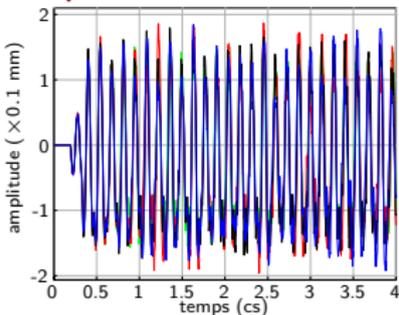


direction ortho-radiale



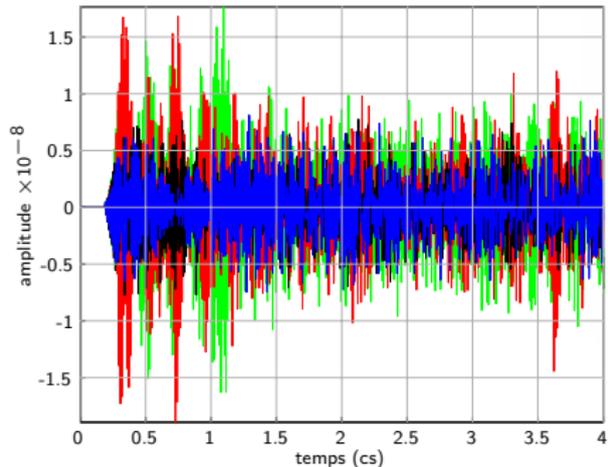
direction axiale

déplacement des nœuds frontières : sans contact

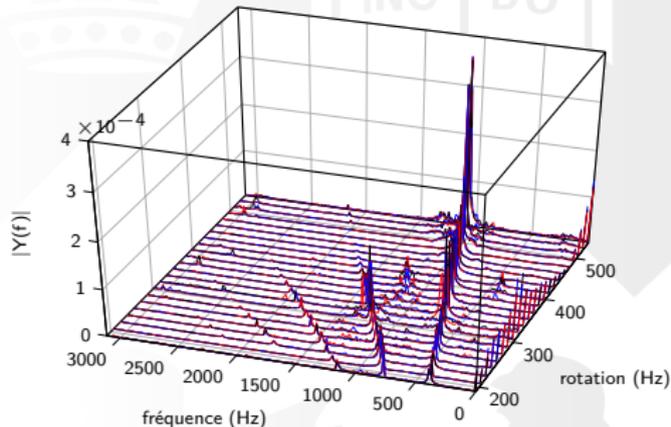


convergence non linéaire $(\Omega = 366 \text{ Hz}, n = 2, \mu = 0,2)$

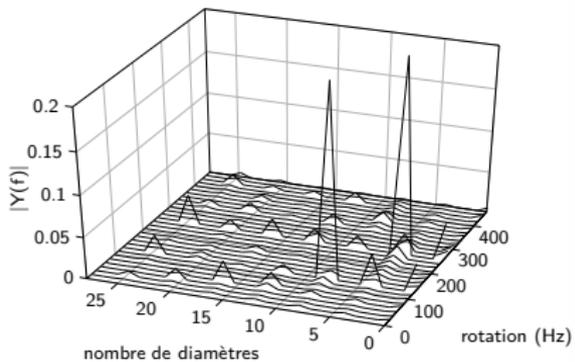
déplacement des nœuds intérieurs



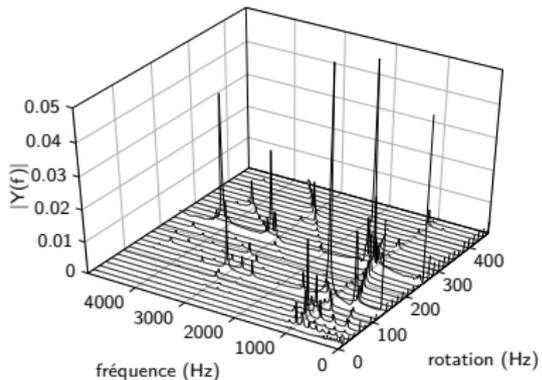
transformée de Fourier



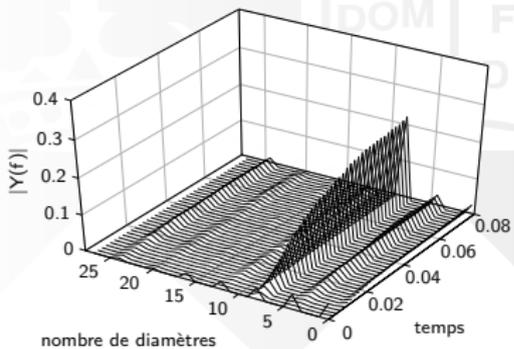
autres cas : $n = 4$, $\mu = 0.2$



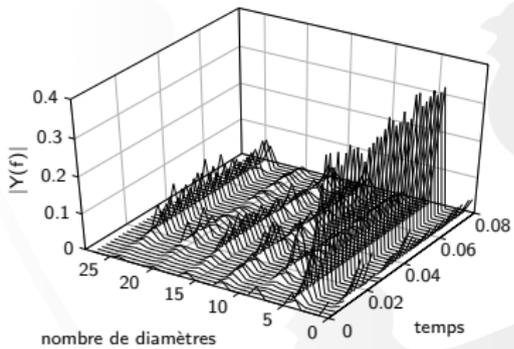
déformée en fin de simulation



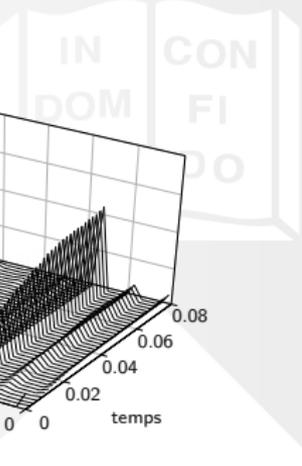
réponse en fréquence



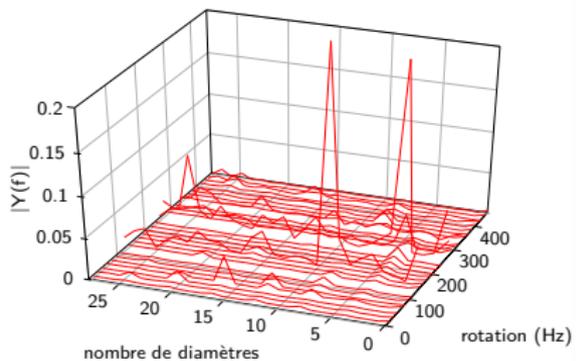
évolution de la déformée à 127 Hz



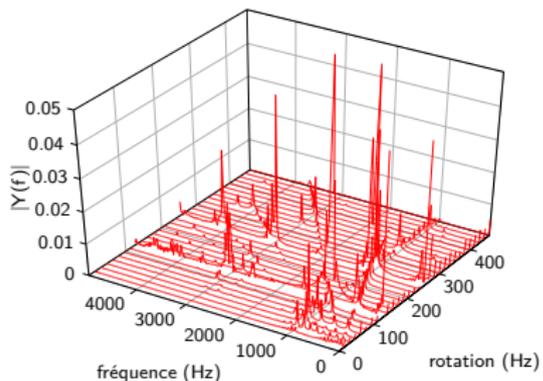
évolution de la déformée à 254 Hz



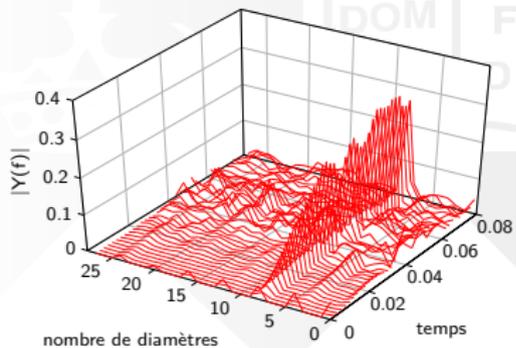
autres cas : $n = 4$, $\mu = 0.5$



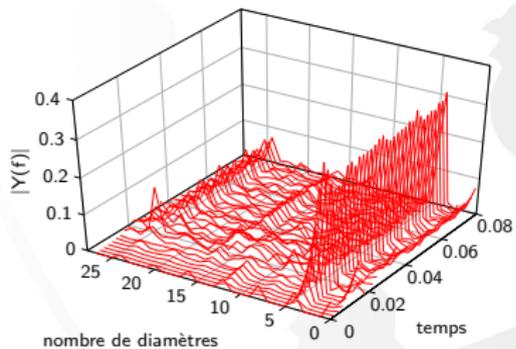
déformée en fin de simulation



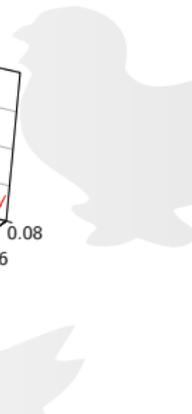
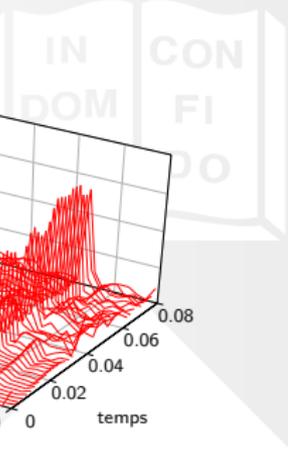
réponse en fréquence



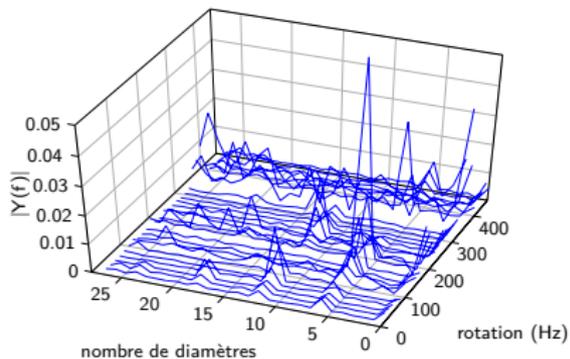
évolution de la déformée à 127 Hz



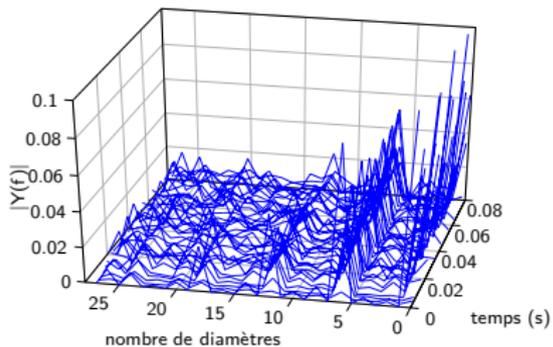
évolution de la déformée à 254 Hz



autres cas : $n = 6$, $\mu = 0.5$

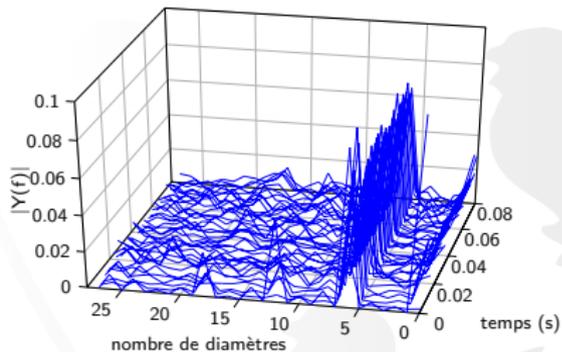


réponse en fréquence

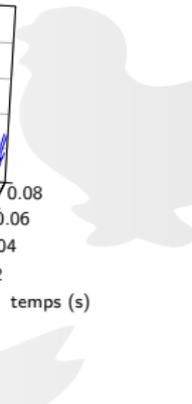


réponse en fréquence

évolution de la déformée à 127 Hz

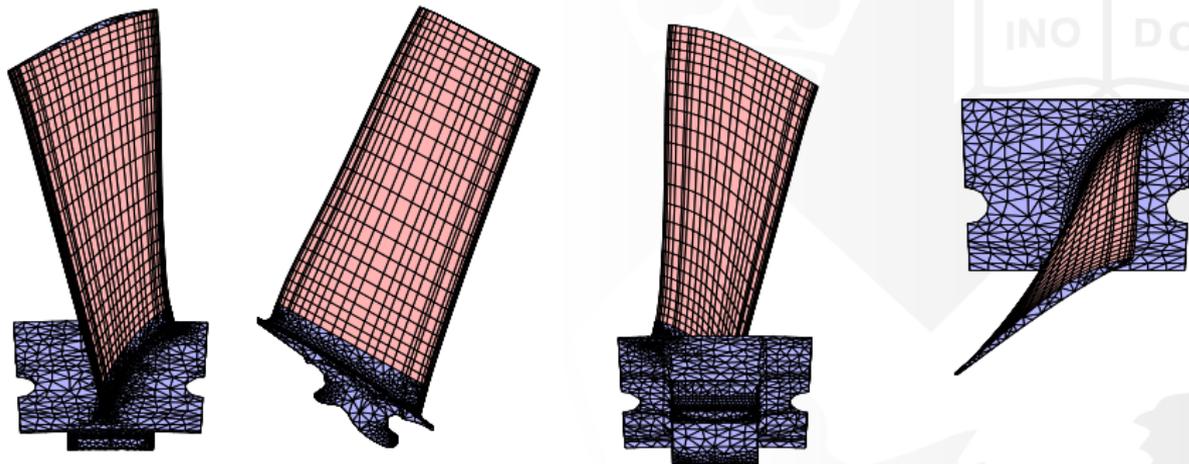


évolution de la déformée à 254 Hz



présentation

vues



premiers modes propres (à $\Omega = 237 \text{ rad/s}$)

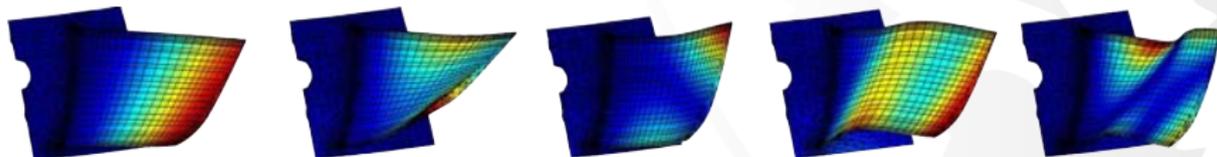
$f_1 = 179.8 \text{ Hz}$

$f_2 = 704.2 \text{ Hz}$

$f_3 = 1018 \text{ Hz}$

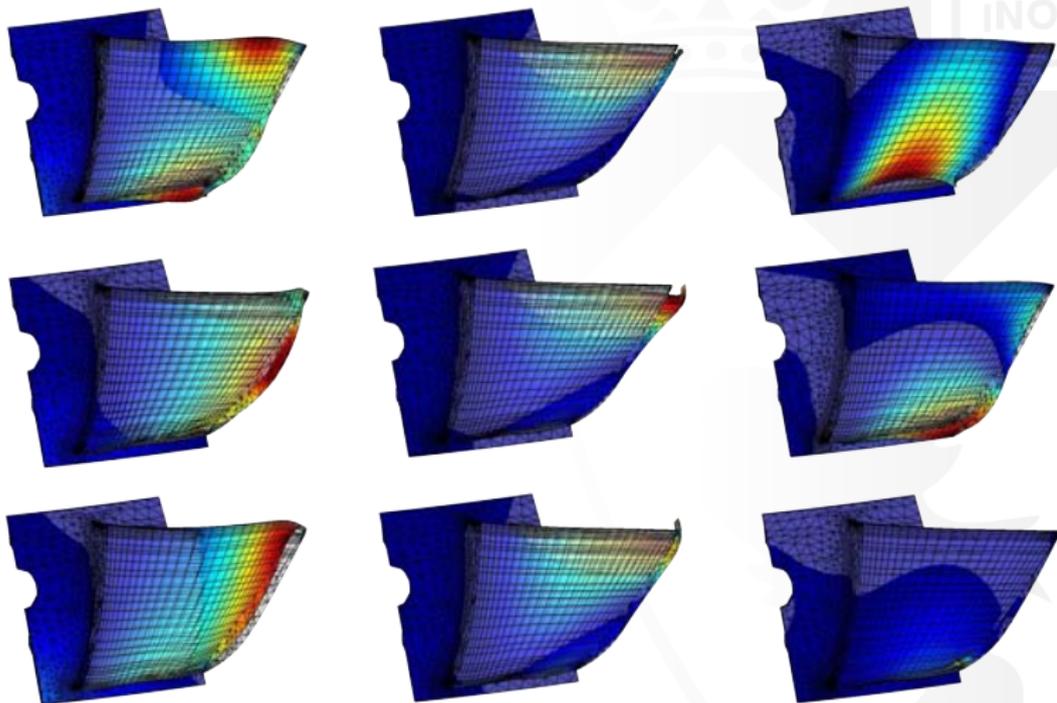
$f_4 = 1288 \text{ Hz}$

$f_5 = 2263 \text{ Hz}$



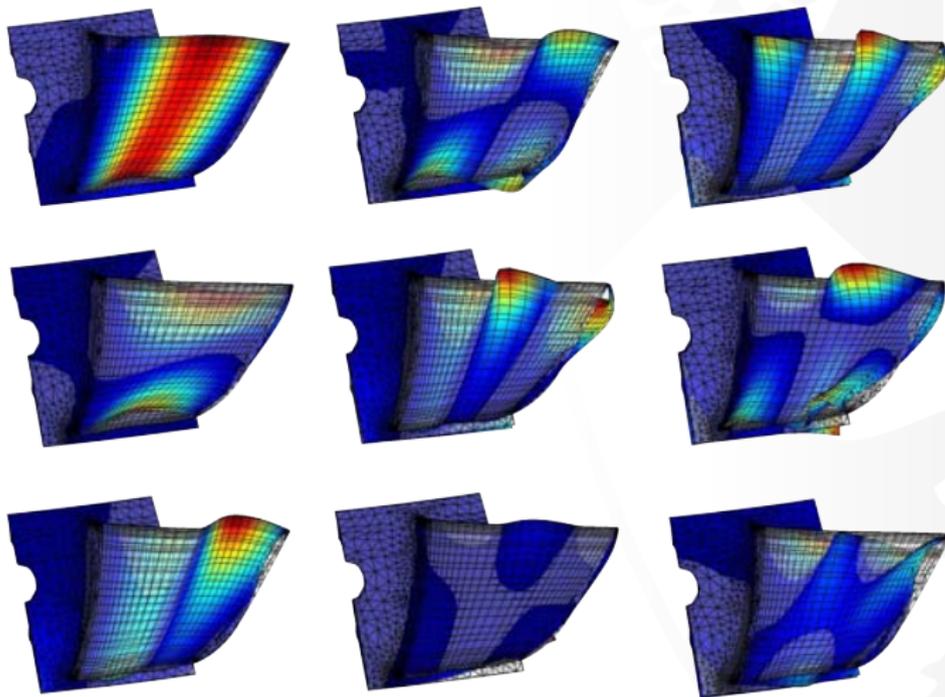
modes de Craig-Bampton (à $\Omega = 237 \text{ rad/s}$)

modes statiques



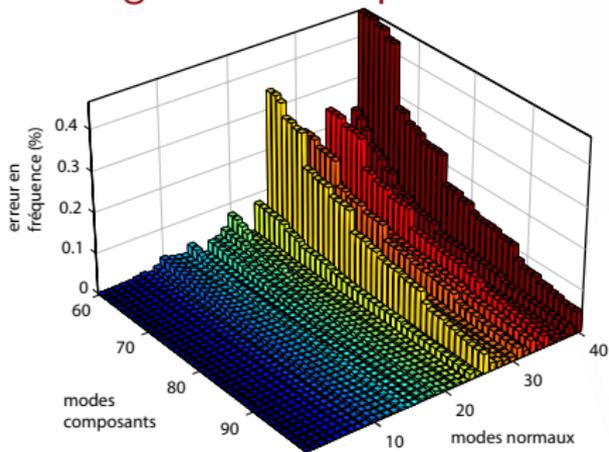
modes de Craig-Bampton (à $\Omega = 237$ rad/s)

modes composants

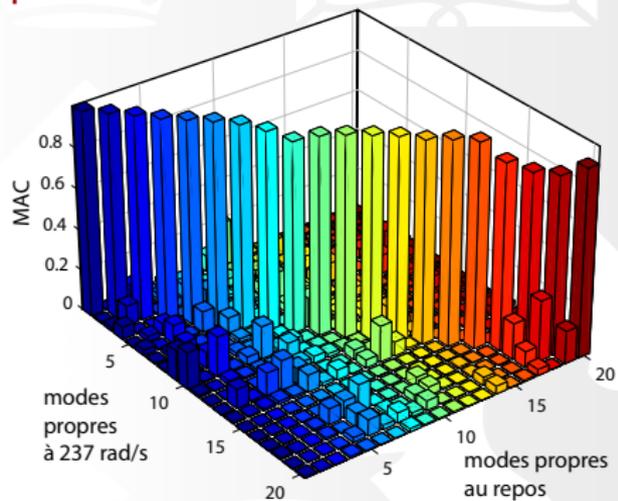


comparaisons

convergence des fréquences

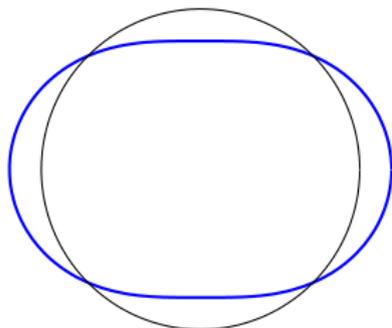


proximité des formes modales

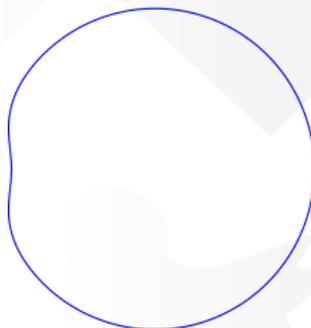


conditions d'interaction

- cas 1 : déformation du carter à deux diamètres : cas purement non linéaire, gestion du contact ;
- cas 2 : déformation locale du carter, cas linéaire "artificiel" et non linéaire avec différents jeux de fonctionnement initial.

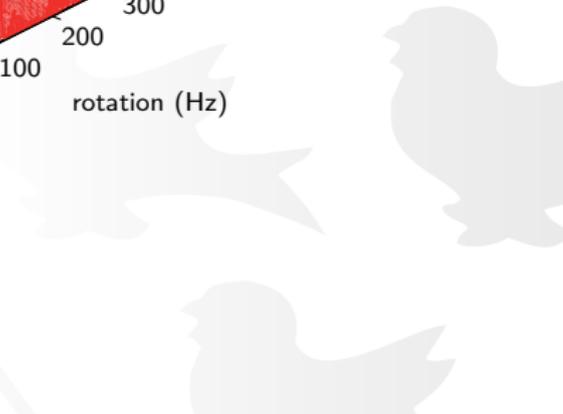
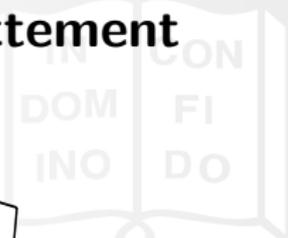
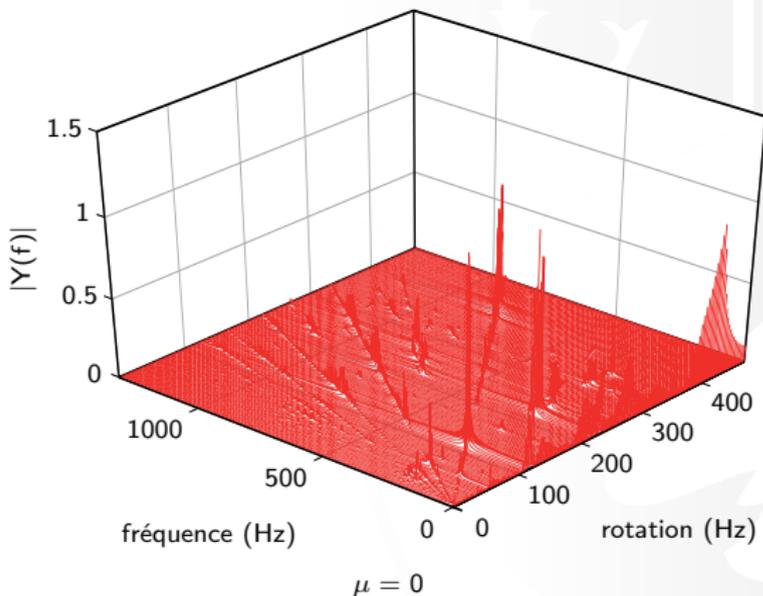


déformée à deux diamètres

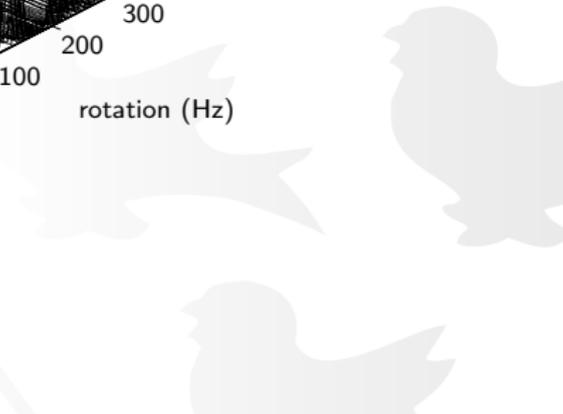
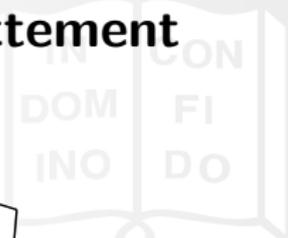
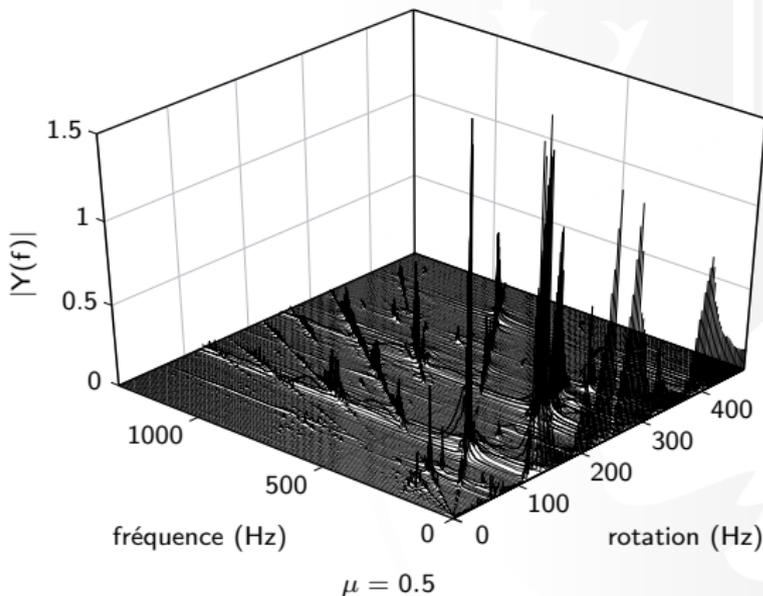


boursouflure

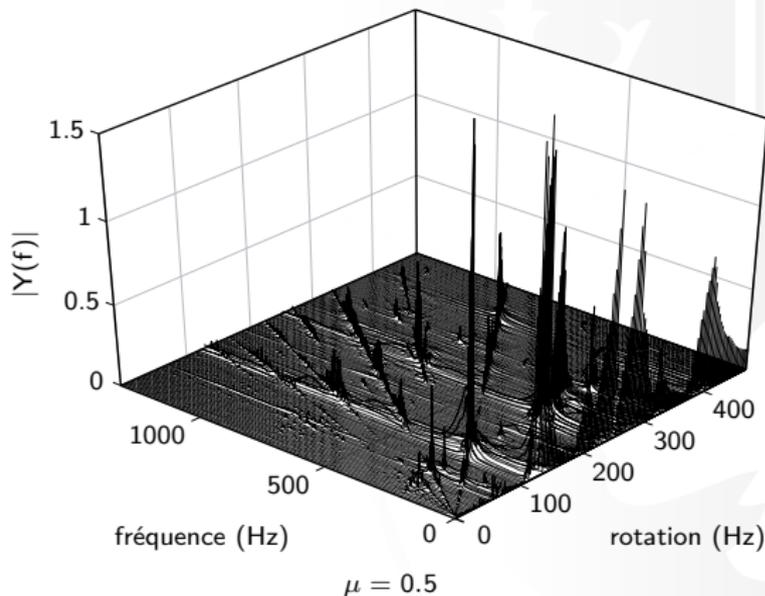
cas 1 : sensibilité au coefficient de frottement



cas 1 : sensibilité au coefficient de frottement



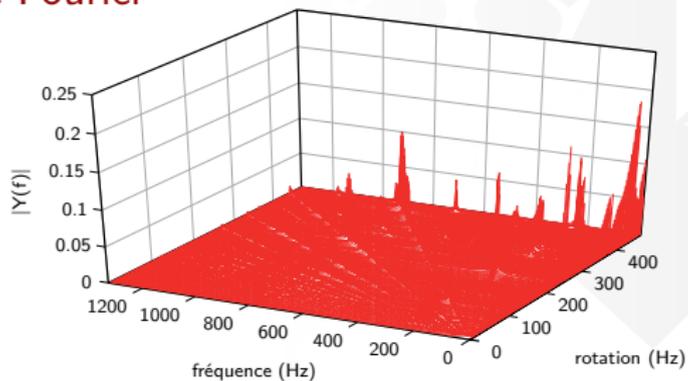
cas 1 : sensibilité au coefficient de frottement



- vitesses critiques identiques
- augmentation légère des amplitudes de vibration avec le coefficient de frottement

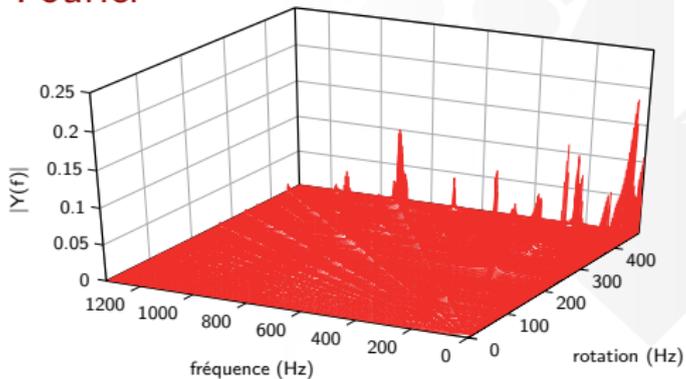
cas 2 : sensibilité au jeu initial

transformée de Fourier

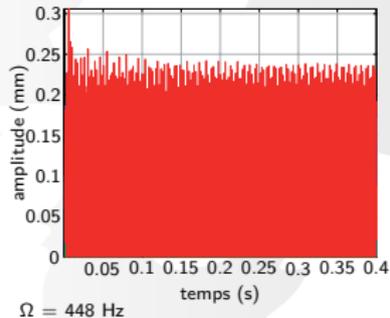
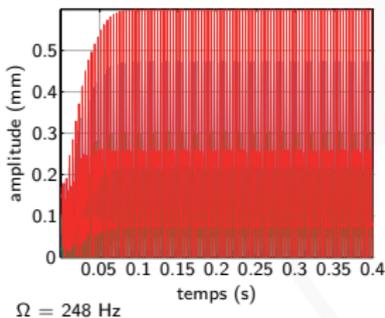
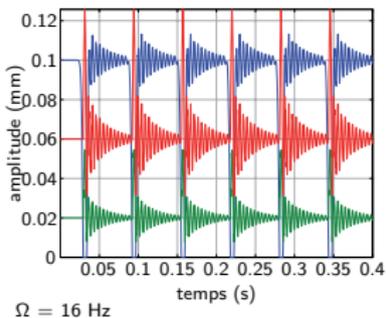


cas 2 : sensibilité au jeu initial

transformée de Fourier

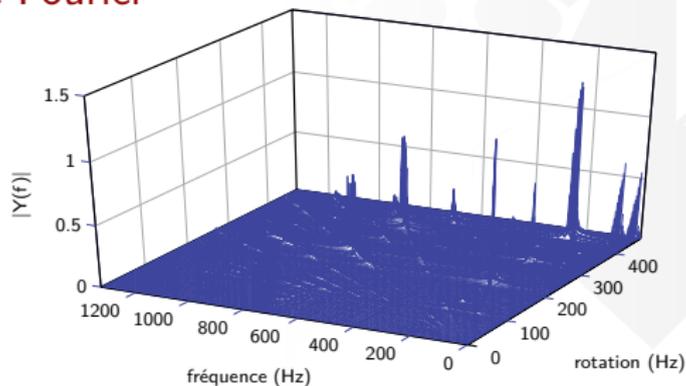


distances aube - carter

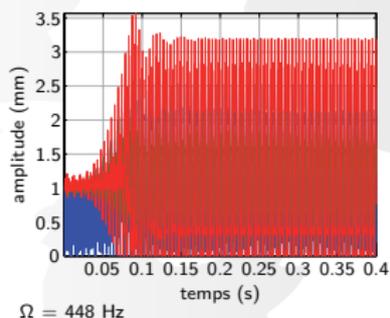
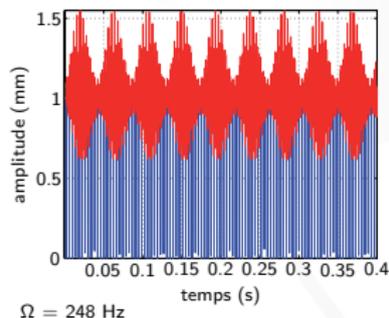
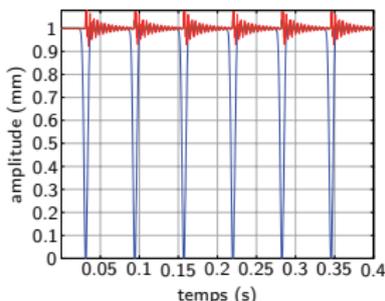


cas 2 : sensibilité au jeu initial

transformée de Fourier

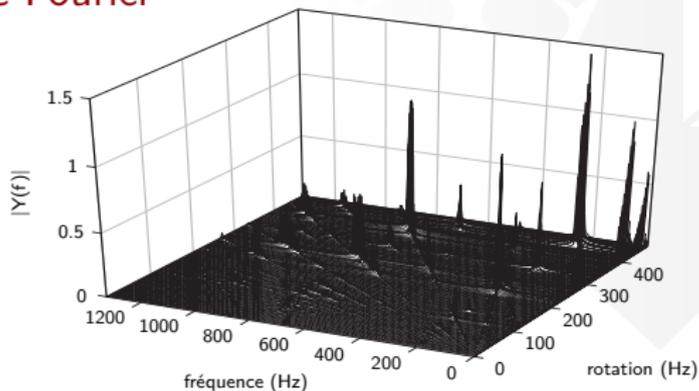


distances aube - carter

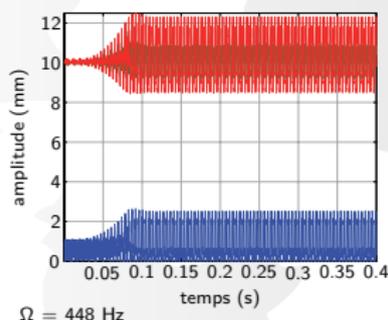
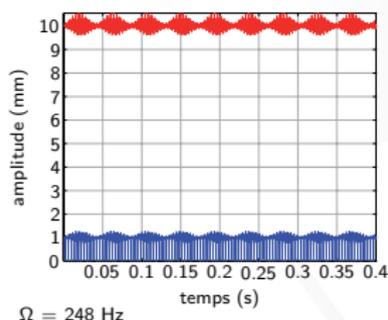
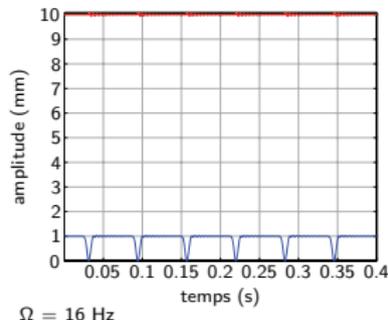


cas 2 : sensibilité au jeu initial

transformée de Fourier



distances aube - carter



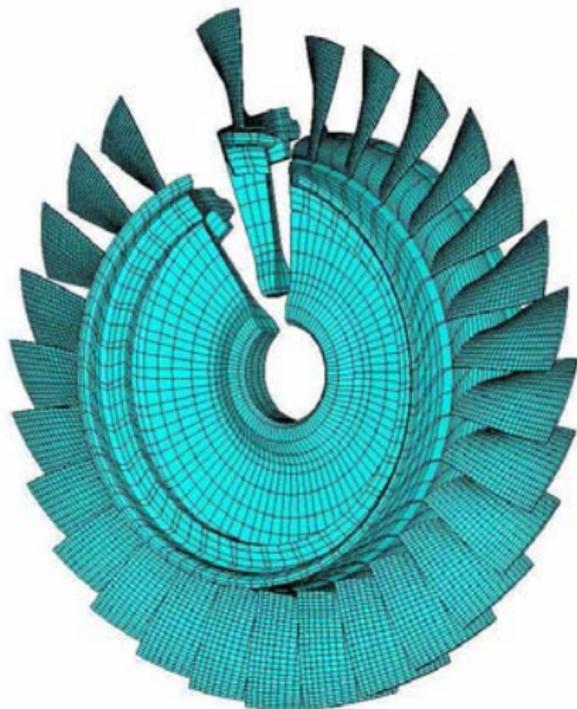
conclusions

- outil numérique complètement fonctionnel
- réduction de Craig-Bampton adaptée au cas d'interaction traités
- bonne prise en compte des contraintes de contact
- nouvelles vitesses d'interaction dues au contact

- prise en compte de l'usure
- développement d'une méthode fréquentielle de type équilibrage harmonique (possible dans certains cas) pour conduire des études paramétriques plus rapidement
- possibilité d'études diverses :
 - différents types de sommet d'aube ; optimisation de forme
 - différents types de mise en contact
 - plus de nœuds frontières ; étude de la sensibilité à ce paramètre
- comparaison à la méthode de Craig Chang Martinez



désaccordage : structures avec symétrie cyclique



- les disques aubagés sont “idéalement” accordés
- réplication d'une entité minimale appelée *secteur*
- matrices masse et raideur *circulantes*
- un secteur *fondamental* contient toute la dynamique de la structure sans perte d'information

désaccordage

- en pratique, différences entre secteurs inévitables
- analyse par symétrie cyclique devient caduque
- effet de localisation de l'énergie, augmentation non négligable des niveaux de contrainte
- deux types de désaccordage : petit (statistique) et grand (géométrique)
- nécessité d'une analyse complète : trop lourde

réponse d'une roue aubagée accordée sur une excitation à 3 diamètres

réponse d'une roue aubagée désaccordée sur une excitation à 3 diamètres

désaccordage : modélisation

modèles réduits

- prédictions quantitatives de la réponse dynamique de disques aubagés réels grâce à des modèles réduits construits à partir du modèle éléments finis parent
- analyse statistique de la réponse forcée par simulations de Monte-Carlo

références

- Component Mode Synthesis, *Lim et al. (2003)*
 - modèles réduits de très faible dimension, concept de désaccordage mesurable, mise à jour rapide dans les simulations de Monte-Carlo
 - grand désaccordage avec convergence lente
- Static Mode Compensation, *Lim et al. (2004)*
 - modèles réduits de très faible dimension avec désaccordage géométrique
 - couplage au désaccordage faible non mesurable

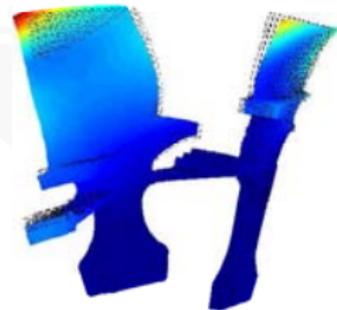
modélisation de systèmes multi-étages

secteur multi-étage



exemple

mode couplé

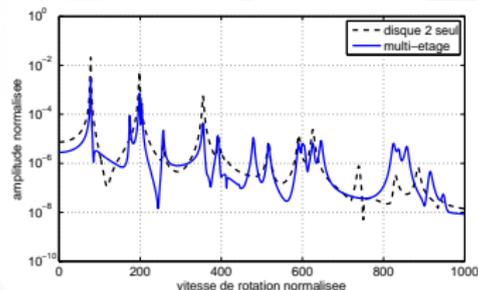


- un secteur de chaque étage
- incompatibilité géométrique à l'interface

principes

- 1 symétrie cyclique pour chaque étage
- 2 couplage inter-étage par *équivalence des nombres d'onde*

influence du couplage

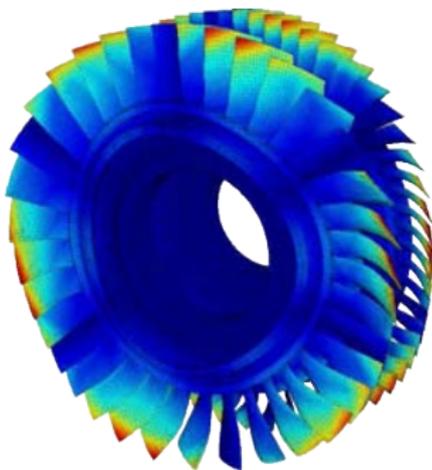


modélisation des systèmes multi-étages

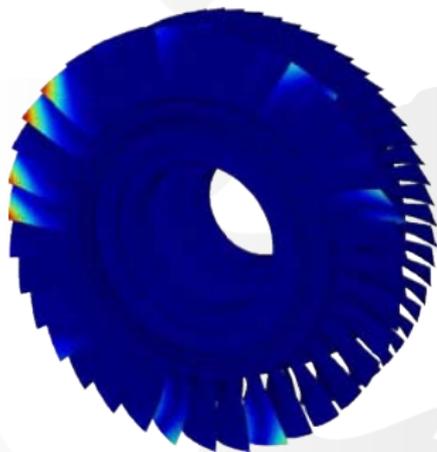
- le système désaccordé est représenté à l'aide de la base modale en symétrie cyclique (multi-étage) du système accordé
- le désaccordage est introduit par perturbation en fréquence des modes d'aubes

exemples

mode accordé

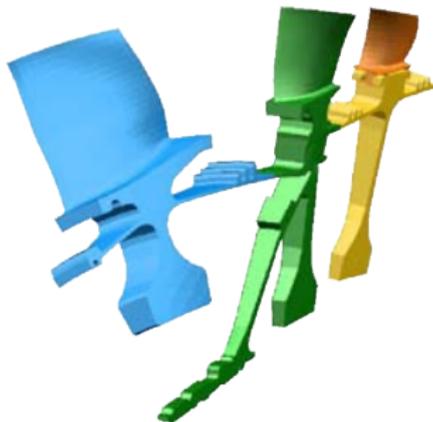


mode désaccordé



optimisation en dynamique des systèmes multi-étages

optimisation géométrique des parties hors-veine



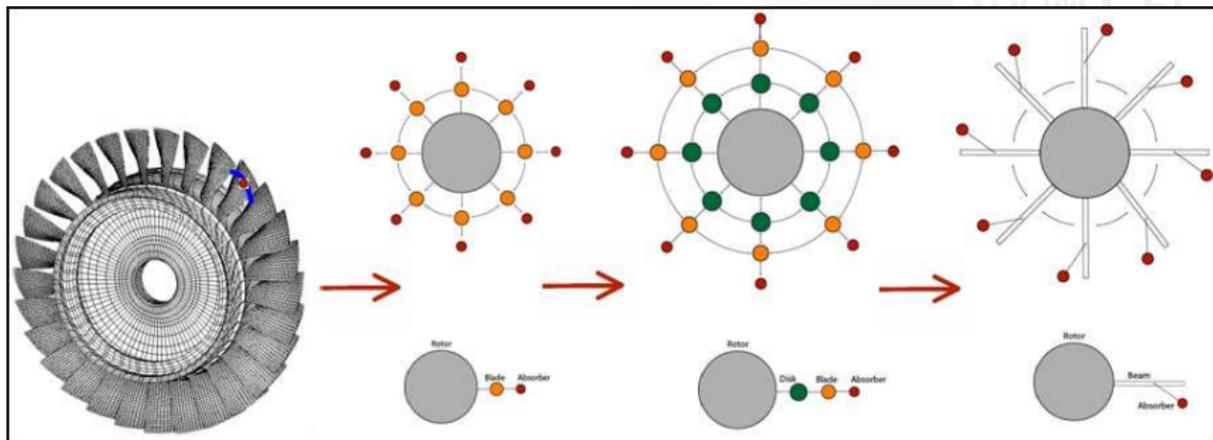
stratégie envisagée

- paramétrisation géométrique
- lien fort : CAO – Maillage – Calcul
- optimisation de surface de réponse construite par plans d'expérience

définition du problème

- minimisation de la masse
- sous contraintes de tenue (thermo-)mécanique
 - statique
 - réponse forcée
 - stabilité

absorption de vibrations par pendules centrifuges



- principe d'absorption passive
- efficacité prouvée dans les moteurs de voiture

absorption de vibrations par pendules centrifuges

- roues aubagées avec AVPC
 - absorbeurs de vibration
 - excitation de type Engine Order
 - modèles mathématiques
- effets des absorbeurs sur des modèles linéaires à 2 et 3 ddl
 - réglage de l'absorbeur
 - comparaison sans et avec absorbeurs
 - différents types de chemin
- systèmes non linéaires
 - méthode des échelles multiples
 - méthode de moyennage (averaging)
 - simulations temporelles directes
- effets du désaccordage
 - aubes
 - absorbeurs
 - aubes-absorbeurs

