ÉLASTICITÉ. — *Homogénéisation par développements asymptotiques mixtes. Vibrations harmoniques d'un anneau hétérogène à structure périodique*. Note (*) de **Roger Ohayon,** présentée par Paul Germain.

Le calcul des vibrations de structures élastiques hétérogènes périodiques, relevant notamment de théories du second gradient, est effectué en adaptant formellement les méthodes d'homogénéisation par développements asymptotiques à l'aide de développements simultanés des contraintes et des déplacements considérés comme variables indépendantes.

Starting from the classical "displacement" method of homogenization by asymptotic expansions, we derive a mixed type procedure which considers the stresses and the displacement as independent unknowns and which is particularly efficient for the computation of the vibrations of a second gradient type elastic medium.

1. INTRODUCTION. — Dans le cadre de l'étude des vibrations de structures minces de révolution, éventuellement couplées à des fluides intérieurs et munies de raidisseurs périodiquement répartis, nous nous proposons, pour ces milieux relevant notamment de théories du second gradient ([1], [2]) et dans le cas de longueurs d'onde grandes devant les dimensions de la cellule de base, d'adapter les techniques d'homogénéisation par développements asymptotiques avec échelles multiples ([3] à [6]) au moyen d'une méthode mixte. Cette méthode permet, en ramenant le système d'équations aux dérivées partielles à un système canonique, d'effectuer simplement les développements asymptotiques qui seraient inextricables sur le système primal en déplacements. Dans cette méthode, les variables primales (déplacements) et duales (contraintes) sont développées indépendamment. Il faut ici rappeler l'intérêt des méthodes mixtes au sens de Hellinger-Reissner ([2], [7], [8]).

Avant d'illustrer cette méthode sur l'exemple de l'anneau, nous montrons comment s'agencent les calculs dans le cas de l'élasticité tridimensionnelle sachant toutefois que les résultats d'homogénéisation ont déjà été établis [4].

2. VIBRATIONS DE MILIEUX ÉLASTIQUES BORNÉS A STRUCTURE PÉRIODIQUE. — *Développements mixtes formels*. — On considère le problème des vibrations harmoniques d'un corps hyperélastique autour d'un état d'équilibre naturel et qui occupe dans cet état un domaine borné $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. En termes de variables contraintes $\sigma^\varepsilon(x)$ et de déplacements $U^\varepsilon(x)$ définis en tout point $x \in \Omega$, les équations du problème spectral s'écrivent (moyennant des hypothèses de régularité) :

trouver $\lambda^\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ et $U^\varepsilon(x)$, $\sigma^\varepsilon(x)$ tels que :

$$\mathrm{div}_x\,\sigma^\varepsilon+\rho^\varepsilon\lambda^\varepsilon U^\varepsilon=0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\sigma^\varepsilon=A^\varepsilon(D_x(U^\varepsilon)) \quad \text{dans } \Omega, \tag{2}$$

$$\sigma^\varepsilon n=0 \quad \text{sur } \partial\Omega_F, \tag{3}$$

$$U^\varepsilon=0 \quad \text{sur } \partial\Omega_U, \tag{4}$$

où $\partial\Omega=\partial\Omega_F \cup \partial\Omega_U$ et n désigne la normale extérieure à $\partial\Omega_F$. Le tenseur $D_x(U^\varepsilon)$ est la partie paire du gradient de U^ε, ρ^ε est la masse volumique du corps et (2) la loi de comportement. $A^\varepsilon(x)$ et $\rho^\varepsilon(x)$ présentent un caractère périodique selon la définition usuelle de [4] : pour $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, $A^\varepsilon(x)$ et $\rho^\varepsilon(x)$ sont périodiques en x, de période εY, Y désignant la période de base. On effectue les développements mixtes

$$\begin{cases} U^\varepsilon(x)=U_0(x,y)+\varepsilon U_1(x,y)+\ldots, \\ \sigma^\varepsilon(x)=\sigma_0(x,y)+\varepsilon\sigma_1(x,y)+\ldots \end{cases}$$

avec $\lambda^{\varepsilon}=\lambda_0+\ldots$, $y=x/\varepsilon$ et U_0, U_1; σ_0, σ_1 Y-périodiques. On obtient les systèmes à l'ordre -1 et à l'ordre 0 en ε :

$$\operatorname{div}_y \sigma_0(x, y)=0, \tag{5}$$

$$A(y)\,(D_y(U_0))=0 \rightarrow U_0(x), \tag{6}$$

$$\operatorname{div}_y \sigma_1(x, y)=-\operatorname{div}_x \sigma_0(x, y)-\rho(y)\lambda_0\, U_0, \tag{7}$$

$$A(y)\,(D_y(U_1))=-A(y)\,(D_x(U_0))+\sigma_0(x, y). \tag{8}$$

En prenant div_y (8) et en se servant de (5), en retrouve les correcteurs classiques [4] (en se servant du formalisme intrinsèque de [2]) :

$$\operatorname{div}_y [A(y)\, D_y(U_1)]=-\operatorname{div}_y A(y)\,.\,D_x(U_0). \tag{9}$$

On retrouve alors les résultats d'homogénéisation classiques [4] en notant que l'on obtient d'abord $\sigma_0(x, y)$ avant d'obtenir la loi de comportement homogénéisée qui fait intervenir sa moyenne sur Y et que $\rho(y)$ conduit au coefficient

$$\tilde{\rho}=\frac{1}{|Y|}\int_Y \rho(y)\,dy.$$

3. Vibrations d'un anneau isotrope, hétérogène a structure périodique (en théorie classique des poutres). — *Développements mixtes formels.* — On applique les considérations précédentes au cas d'un opérateur complexe d'ordre 4 avec la simplification due au caractère unidimensionnel de la structure. S (resp. I) désigne l'aire de la section de l'anneau (resp. l'inertie de section), R le rayon, $E^{\varepsilon}(x)$ le module de Young; $u^{\varepsilon}(x)$ et $v^{\varepsilon}(x)$ désignent les composantes circonférencielle et radiale du déplacement ($x \in\,]0, L[$, $L=2\pi R$). Le problème spectral s'écrit au moyen du quotient de Rayleigh :

trouver $\lambda^{\varepsilon}\in \mathbf{R}^+$, $(u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})\in V$,

$$V=\left\{(u, v)\in H^1(]0, L[)\times H^2(]0, L[);\ u(0)=u(L),\ v(0)=v(L),\ \frac{dv}{dx}(0)=\frac{dv}{dx}(L)\right\},$$

tels que :

$$[\lambda^{\varepsilon}]=\frac{1/2\displaystyle\int_0^L E^{\varepsilon} S\,((du^{\varepsilon}/dx)-\underset{R}{v^{\varepsilon}})^2+1/2\int_0^L E^{\varepsilon} I\,(d/dx\,((dv^{\varepsilon}/dx)+(u^{\varepsilon}/R)))^2}{1/2\displaystyle\int_0^L \rho^{\varepsilon}(u^{\varepsilon^2}+v^{\varepsilon^2})}, \tag{10}$$

soit stationnaire. Les équations en déplacements qui en résultent sont

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(E^{\varepsilon} S\left(\frac{du^{\varepsilon}}{dx}-\frac{v^{\varepsilon}}{R}\right)\right)+\frac{1}{R}\frac{d}{dx}\left(E^{\varepsilon} I\left(\frac{d^2 v^{\varepsilon}}{dx^2}+\frac{1}{R}\frac{du^{\varepsilon}}{dx}\right)\right)+\rho^{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon} u^{\varepsilon}=0,\\
&\frac{1}{R}\left(E^{\varepsilon} S\left(\frac{du^{\varepsilon}}{dx}-\frac{v^{\varepsilon}}{R}\right)\right)-\frac{d^2}{dx^2}\left(E^{\varepsilon} I\left(\frac{d^2 v^{\varepsilon}}{dx^2}+\frac{1}{R}\frac{du^{\varepsilon}}{dx}\right)\right)+\rho^{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon} v^{\varepsilon}=0,\\
&\qquad (u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})\in V,
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

La complexité de ces équations nous conduit à introduire les variables duales

$$\left.\begin{aligned}&(12)\qquad N^{\varepsilon}=E(y)S\left(\frac{du^{\varepsilon}}{dx}-\frac{v^{\varepsilon}}{R}\right)\\&(13)\qquad M^{\varepsilon}=E(y)I\left(\frac{d^2v^{\varepsilon}}{dx^2}+\frac{1}{R}\frac{du^{\varepsilon}}{dx}\right)\end{aligned}\right\}\quad \text{avec}\quad y=\frac{x}{\varepsilon},$$

N^{ε}, M^{ε} désignent respectivement l'effort normal et le moment fléchissant. Les équations (11) donnent alors les équations d'équilibre classique [1] correspondant à un principe du type Hellinger-Reissner issu de (10) :

$$\frac{d}{dx}\left(N^{\varepsilon}+\frac{M^{\varepsilon}}{R}\right)+\rho^{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon}u^{\varepsilon}=0, \tag{14}$$

$$\frac{N^{\varepsilon}}{R}-\frac{d^2M^{\varepsilon}}{dx^2}+\rho^{\varepsilon}\lambda^{\varepsilon}v^{\varepsilon}=0. \tag{15}$$

En effectuant les développements formels (ordre 1 en ε pour N^{ε} et u^{ε}, ordre 2 pour M^{ε} et v^{ε}) dans le système mixte (12), (13), (14), (15) selon

$$\left\{\begin{aligned}N^{\varepsilon}(x)&=N_0(x,y)+\varepsilon N_1(x,y)+\ldots,\\M^{\varepsilon}(x)&=M_0(x,y)+\varepsilon M_1(x,y)+\varepsilon^2M_2(x,y)+\ldots,\\u^{\varepsilon}(x)&=u_0(x,y)+\varepsilon u_1(x,y)+\ldots,\\v^{\varepsilon}(x)&=v_0(x,y)+\varepsilon v_1(x,y)+\varepsilon^2v_2(x,y)+\ldots,\end{aligned}\right. \tag{16}$$

avec $\lambda^{\varepsilon}=\lambda_0+\ldots$, $y=x/\varepsilon$ et $u_0, u_1; v_0, v_1, v_2; N_0, N_1; M_0, M_1, M_2$ Y-périodiques, on obtient trois systèmes mixtes aux ordres -2, -1, 0. Les équations aux ordres -2 et -1 entraînent la dépendance en x seul des fonctions u_0, N_0 et v_0, v_1, M_0, M_1. Le système à l'ordre 0 s'écrit :

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\left(N_1+\frac{M_1}{R}\right)=-\rho(y)\lambda_0u_0-\frac{d}{dx}\left(N_0+\frac{M_0}{R}\right),\\&\frac{\partial}{\partial y}M_2=\rho(y)\lambda_0v_0+\frac{N_0}{R}-\frac{d^2M_0}{dx^2},\\&\frac{\partial}{\partial y}u_1=\frac{N_0}{SE(y)}+\frac{v_0}{R}-\frac{du_0}{dx},\\&\frac{\partial}{\partial y}v_2=\frac{M_0}{IE(y)}-\frac{N_0}{SRE(y)}-\frac{v_0}{R}-\frac{d^2v_0}{dx^2},\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Les conditions d'intégrabilité de (17) conduisent alors aisément au problème homogénéisé avec un module de Young égal à $1/\mathcal{M}oy(1/E)$ et une masse linéique égale à $\mathcal{M}oy\,(\rho)$ (moyennes effectuées sur Y). On obtient de plus les correcteurs définis par

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dy}E(y)\frac{dX_1}{dy}=\frac{dE}{dy}\\&X_1\ \text{Y-périodique}\end{aligned}\right.\quad\text{et}\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2}{dy^2}E(y)\frac{d^2X_2}{dy^2}=\frac{dE}{dy}\\&X_2\ \text{Y-périodique,}\end{aligned}\right. \tag{18}$$

conduisant à

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_1(x,\,y) &= \mathrm{X}_1(y)\left[\frac{v_0}{\mathrm{R}} - \frac{du_0}{dx}\right],\\
v_1(x,\,y) &= -\mathrm{X}_2(y)\left[\frac{u_0}{\mathrm{R}} + \frac{d^2 v_0}{dx^2}\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Résultats numériques par éléments finis. — Pour $\varepsilon = 1/10$, on obtient entre un calcul exact (négligeant les effets de cisaillement) et un calcul homogénéisé une erreur relative de 0,9 % sur la cinquième valeur propre. Le calcul se transpose aisément au cas des raidisseurs intégrés en jouant sur S et I au lieu de E.

(*) Séance du 15 janvier 1979.

[1] P. GERMAIN, *Cours de Mécanique des Milieux continus*, I, 1973, Masson, Paris, et *Cours de l'École polytechnique*, 1977.

[2] R. VALID, *La Mécanique des Milieux continus et le Calcul des Structures*, Eyrolles, Paris, 1977, North-Holland (à paraître) et communications personnelles.

[3] J. L. LIONS, *Homogénéisation dans Applications des méthodes de l'analyse fonctionnelle aux problèmes de mécanique* [*Lecture Notes in Math.*, n° 503 (P. Germain, B. Nayrolles, Organisateurs), Springer-Verlag, 1975)] et A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS et G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic Methods in Periodic Structures*, North-Holland (à paraître).

[4] G. DUVAUT, *Analyse fonctionnelle. Mécanique des Milieux continus. Homogénéisation* (*Theoretical and Applied Mechanics*, North-Holland, 1976), et cours de D.E.A. de l'Université Pierre-et-Marie-Curie, 1977.

[5] E. SANCHEZ-PALENCIA, *Int. J. Engng, Sc.*, 12, 1974, p. 331.

[6] M. VANNINATHAN, *Comptes rendus*, 287, série A, 1978, p. 403.

[7] R. VALID, *J. Computer and Structures*, 10, 1978, p. 391.

[8] P. CIARLET et P. DESTYUNDER, *A Justification of the Two-Dimensional Linear Plate Model*, Rapport n° 23, Centre de Mathématiques appliquées de l'École polytechnique, 1978 et P. DESTYUNDER [*Thèse* (à paraître)].

Office national d'Études et de Recherches aérospatiales,
29, avenue de la Division-Leclerc, 92320 *Châtillon.*