

HOMOGÉNÉISATION PAR DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES MIXTES. CALCUL DES VIBRATIONS DE MILIEUX ÉLASTIQUES A STRUCTURE PÉRIODIQUE

par

Roger OHAYON (*)

RÉSUMÉ

Après avoir rappelé brièvement les diverses méthodes d'homogénéisation de structures hétérogènes périodiques (travaux de J. L. Lions, G. Duvaut, L. Tartar, E. Sanchez-Palencia...), nous présentons une méthode mixte d'homogénéisation utilisant la technique de développement asymptotique avec échelles multiples employée par les auteurs précités, simultanément sur les variables primales et duales du problème. Il en résulte une simplification notable des calculs, notamment pour des opérateurs d'ordre quatre relevant de théories du second gradient en mécanique des milieux continus [1, 2]. La méthode est illustrée sur le calcul des vibrations harmoniques de structures hétérogènes périodiques. Des résultats numériques sont présentés et démontrent une fois de plus l'intérêt des méthodes d'homogénéisation actuelles.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Méthodes éléments finis — Vibration structure — Homogénéisation — Développement asymptotique.

HOMOGENIZATION BY MIXED ASYMPTOTIC EXPANSIONS. COMPUTATION OF THE VIBRATIONS OF ELASTIC MEDIA WITH PERIODIC STRUCTURE

SUMMARY

We introduce briefly the various homogenization methods for heterogeneous periodic structures (following the studies of J. L. Lions, G. Duvaut, L. Tartar, E. Sanchez-Palencia). We then introduce and propose a mixed method of homogenization using the asymptotic expansions of multi-scale type introduced by the aforementioned authors, for the primal and dual variables simultaneously. By doing this, the fourth-order problems relevant of second gradient theories in mechanics of continuous media become much simpler to handle [1, 2]. Finite element results are presented for the cases of harmonic vibrations of heterogeneous periodic structures such as rings and show the interest and the efficiency of homogenization theories.

Descriptors (NASA thesaurus): Structural vibration — Homogenizing — Finite element method.

(*) Chef de Section de Recherche à l'O.N.E.R.A.

I. — INTRODUCTION

I.1. — GÉNÉRALITÉS

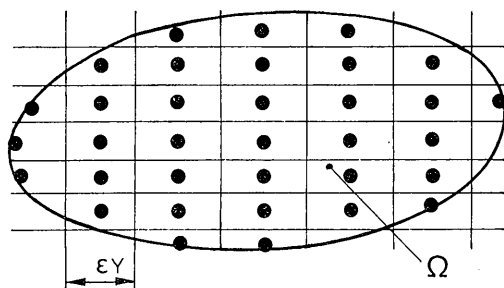
Les systèmes complexes tels que les structures inter-étages de lanceurs, les réservoirs partiellement remplis de liquide, font intervenir très fréquemment des coques minces de révolution munies de raidisseurs périodiquement répartis. Le calcul par éléments finis des vibrations harmoniques de telles structures qui nécessite, du fait de la rupture de la symétrie de révolution, un grand nombre de degrés de liberté, est grandement facilité par les considérations suivantes :

a) utilisation du concept de symétrie et de résultats issus de la théorie des groupes, ramenant le problème à l'étude d'une cellule élémentaire dans le cas où la longueur d'onde du phénomène vibratoire est de l'ordre de grandeur des dimensions de la cellule (faible nombre de raidisseurs).

b) utilisation des concepts d'homogénéisation [3, 13] en établissant une loi de comportement « homogénéisée » permettant l'étude d'une structure de révolution « équivalente » dans le cas où l'on s'intéresse à des vibrations dont la longueur d'onde est grande devant les dimensions de la cellule (cas d'un nombre important de raidisseurs).

Ces deux concepts sont complémentaires : en effet, le second fait intervenir, si l'on utilise une méthode d'homogénéisation par développements asymptotiques avec échelles multiples [3, 6], aux divers ordres de ces développements, des correcteurs, qui permettent de prendre en compte le nombre d'hétérogénéités et qui sont généralement, lorsque l'on dépasse l'ordre deux, difficiles à calculer; il vaut alors mieux recourir au premier concept. Dans le cadre de l'homogénéisation et dans un but de simplification des calculs, notamment pour des opérateurs d'ordre quatre correspondant à des milieux relevant de théories du second gradient [1, 2], on propose d'utiliser une méthode mixte utilisant la technique de développements asymptotiques simultanément sur les variables primales et duales du problème [14, 15]. On sait d'ailleurs l'intérêt que présentent les méthodes mixtes au sens de Hellinger Reissner [1, 16, 17].

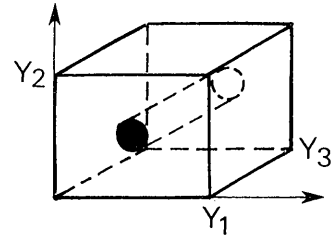
I.2. — GÉNÉRALITÉS SUR L'HOMOGENÉISATION [3, 5, 6]

Fig. 1. — Domaine Ω .

A titre d'exemple, considérons un milieu hétérogène occupant un domaine Ω (fig. 1) et présentant une répartition assez serrée et relativement régulière de différents constituants, de telle sorte que l'on puisse mettre en évidence une certaine périodicité d'espace. On peut supposer que la pièce étudiée est découpée dans un matériau hétérogène périodique et formé de la façon suivante :

Considérons une cellule de base P occupant un domaine Y (ouvert Y) défini par : $Y =]0, Y_1[\times]0, Y_2[\times]0, Y_3[$ (fig. 2).

On effectue une homothétie de rapport ε ; la cellule de

Fig. 2. — Cellule de base P .

base P devient alors $P_1 = \varepsilon P$. La structure réelle sera découpée dans le milieu obtenu par reproduction de P_1 par périodicité dans tout \mathbb{R}^3 . Si $x \in \Omega$ et $y \in Y$, on a (à $k \in \mathbb{N}$ près, $k \in \mathbb{N}$) $x = \varepsilon y$.

Définition [5, 6] :

On appelle *homogénéisation* la démarche consistant en la recherche d'un matériau homogène qui traduit le comportement d'un matériau hétérogène à structure périodique lorsque la période tend vers zéro (la structure interne de la cellule de base restant, pour des problèmes linéaires, invariable).

L'évaluation de l'erreur obtenue et la construction de correcteurs permettant la prise en compte d'une valeur finie de ε correspondra, du point de vue mathématique, à la recherche d'une convergence forte de la solution du problème exact vers la solution d'un problème homogénéisé avec correcteurs.

Après avoir rappelé les diverses méthodes d'homogénéisation, on présentera la méthode de développements asymptotiques mixtes illustrée sur les vibrations harmoniques de milieux élastiques bornés à structure périodique et sur les vibrations harmoniques d'un anneau. Les résultats numériques obtenus à partir de méthodes d'éléments finis montrent que les théories récentes de l'homogénéisation sont très efficaces dans la résolution de problèmes concrets correspondant à des applications actuelles.

II. — GÉNÉRALITÉS SUR LES DIVERSES MÉTHODES D'HOMOGENÉISATION [4, 5, 6]

On distingue essentiellement trois méthodes d'homogénéisation :

1) La méthode des développements asymptotiques avec échelles multiples [3 à 6];

2) La méthode de l'énergie [3, 5, 6, 7, 10, 11];

3) La méthode de la moyenne [8, 9].

Ces trois méthodes conduisent au même résultat en ce qui concerne, en particulier, les problèmes d'élasticité linéaire ou plus généralement les problèmes elliptiques linéaires.

La méthode des développements asymptotiques avec échelles multiples, qui suppose sur le plan mathématique une grande régularité des coefficients des opérateurs a pour avantage, une fois la solution homogénéisée trouvée, de fournir les termes *correcteurs* et en particulier le premier terme correcteur en ε sans calcul supplémentaire selon la définition suivante : si dans l'espace Y , une fonction E caractéristique du comportement du matériau (par exemple le module d'Young...) est périodique, alors on

écrira sur l'espace Ω : $E^\varepsilon(x) = E(y) = E\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $E(y)$ est

une fonction Y -périodique et prolongée par périodicité sur tout l'espace.

La solution du problème, qui elle n'est pas périodique sera cherchée sous la forme d'un développement asymptotique avec échelles multiples :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon(x) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \dots \\ \text{avec } y = \frac{x}{\varepsilon} \text{ et } u_0, u_1, \dots \text{ Y-périodiques.} \end{array} \right.$$

x caractérise le comportement *macroscopique*, et y le comportement local *microscopique* (fluctuations locales périodiques).

La méthode de l'énergie qui ne suppose plus une telle régularité des coefficients des opérateurs fait le plus appel aux techniques de l'analyse fonctionnelle. Cette méthode ne fournit pas une construction des correcteurs.

La méthode de la moyenne est celle qui fournit une interprétation physique du problème homogénéisé. En particulier, elle montre que la loi de comportement homogénéisée relie les valeurs moyennes des contraintes aux valeurs moyennes des déformations, moyennes effectuées sur une cellule élémentaire. Notons par contre que, les coefficients de la loi de comportement homogénéisée ne sont pas les moyennes des coefficients sur une cellule élémentaire. Cette méthode est cependant heuristique.

Nous nous intéresserons ici à la méthode des développements asymptotiques avec échelles multiples.

Cette méthode est habituellement exploitée en utilisant le système d'équations primal du problème, c'est-à-dire celui obtenu en utilisant une variable d'état primale du problème; en élasticité c'est le champ de déplacement en tout point du corps.

Nous nous proposons de présenter une méthode d'homogénéisation par développements asymptotiques mixtes [14, 15] qui consiste à utiliser la technique de développement asymptotique usuelle, non pas sur le système primal, mais sur le système mixte correspondant, c'est-à-dire sur le système exprimé à la fois en fonction des variables primales et duales du problème : en élasticité la variable duale est comme on sait le champ de contraintes en tout point du corps.

Cette méthode que nous développons avec quelques détails peut s'appliquer à tous les problèmes linéaires statiques. Nous allons ici l'illustrer d'abord sur le cas des vibrations harmoniques de milieux élastiques en retrouvant, les résultats classiques d'homogénéisation [5, 6] avant de l'illustrer sur un cas complexe d'opérateurs faisant intervenir des dérivées d'ordre deux, trois et quatre : celui de l'anneau élastique.

III. — VIBRATIONS HARMONIQUES DE MILIEUX ÉLASTIQUES BORNÉS A STRUCTURE PÉRIODIQUE

DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES MIXTES

III.1. — CAS GÉNÉRAL

On considère le problème des petits mouvements harmoniques d'un corps hyperélastique autour d'un état d'équilibre naturel et qui occupe, dans cet état, un domaine ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière.

La description cinématique de ce corps introduit un espace vectoriel de formes admissibles du corps libre \mathcal{C} dont les éléments sont des champs de vecteurs. On désigne par $U(x)$ l'amplitude modale du champ de déplacements en tout point $x \in \Omega$.

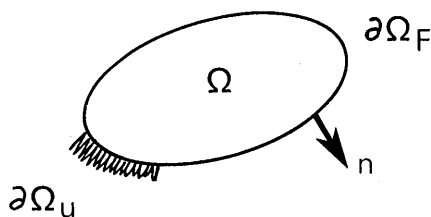


Fig. 3.

A chaque $U \in \mathcal{C}$ correspond un champ de déformations défini par :

$$(1) \quad D(U) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \right]$$

la barre désignant la transposition. En coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) on a, en désignant par ε_{kh} les composantes de D (on utilise la même notation par D et pour $D(U)$) :

$$\varepsilon_{kh} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_k}{\partial x_h} + \frac{\partial U_h}{\partial x_k} \right].$$

La présence du champ de déformations D s'accompagne d'un champ de contraintes (nous négligeons ici les effets de précontrainte [1]) au travers de la relation de comportement :

$$(2) \quad \sigma(x) = A(x) (D(U))$$

ou encore en coordonnées cartésiennes : $\sigma_{ij} = a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(U)$.

On suppose de plus que A satisfait les propriétés usuelles de symétrie et d'ellipticité. A peut à l'occasion être considéré comme élément de $L(\mathbb{R}^6; \mathbb{R}^6)$, de même que D peut être considéré soit comme endomorphisme de \mathbb{R}^3 soit comme vecteur de \mathbb{R}^6 . Nous suivrons dans ce qui suit le formalisme intrinsèque de [1].

On désigne par $\rho(x)$ la masse volumique du corps ($0 < \rho_0 \leq \rho(x) < \infty$).

Nous nous intéressons ici au cas où $A(x)$ et $\rho(x)$ présentent un caractère périodique selon la définition usuelle de [5, 6] :

si $Y =]0, Y_1[\times]0, Y_2[\times]0, Y_3[$ est la période de base et si $A(y)$ et $\rho(y)$ sont des fonctions définies sur $Y(y \in Y)$ et prolongées par périodicité à \mathbb{R}^3 tout entier, on définit pour tout scalaire ε positif destiné à tendre vers zéro :

$$(3) \quad A^\varepsilon(x) = A \left(\begin{array}{c} x \\ - \\ \varepsilon \end{array} \right) = A(y)$$

$$(4) \quad \rho^\varepsilon(x) = \rho \left(\begin{array}{c} x \\ - \\ \varepsilon \end{array} \right) = \rho(y)$$

de sorte que $A^\varepsilon(x)$ et $\rho^\varepsilon(x)$ seront périodiques en x ($x \in \Omega$) de période εY .

Les équations du problème spectral du corps encastré suivant $\partial\Omega_U \subset \partial\Omega$ et libre sur $\partial\Omega_F \subset \partial\Omega$ ($\partial\Omega_U \cap \partial\Omega_F = \emptyset$, $\partial\Omega_U \cup \partial\Omega_F = \partial\Omega$) s'écrivent :

Trouver $\lambda^\varepsilon = [\omega^\varepsilon]^2$ (carré de la pulsation propre ω^ε) et $U^\varepsilon(x)$, $\sigma^\varepsilon(x)$ tels que :

$$(5) \quad \text{div } \sigma^\varepsilon + \rho^\varepsilon \lambda^\varepsilon U^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$(6) \quad \sigma^\varepsilon = A^\varepsilon(D(U^\varepsilon)) \quad \text{dans } \Omega$$

$$(7) \quad \sigma^\varepsilon n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_F$$

$$(8) \quad U^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_U$$

n désigne la normale unitaire à $\partial\Omega$ extérieure à Ω .

On rappelle que en coordonnées cartésiennes, (5) s'écrit :

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji}^\varepsilon + \rho^\varepsilon \lambda^\varepsilon U_i = 0.$$

Pour ε donné, il est classique de démontrer, en exprimant usuellement (5) -- (8) en termes de U^ε , (astreint à certaines conditions de régularité, en particulier,

$$U^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^3 \text{ avec } U^\varepsilon = 0 \text{ sur } \partial\Omega_Y, H^1(\Omega)$$

désignant l'espace de Sobolev d'ordre un des fonctions de carré sommable dont les dérivées-distributions sont de carré sommable), que le système possède une infinité dénombrable de valeurs propres, chacune d'elle étant de multiplicité finie (dégénérescence finie) [12, 18].

La méthode de développements asymptotiques mixtes avec échelles multiples que nous proposons repose sur des développements asymptotiques *simultanés* de $\sigma^\varepsilon(x)$ et de $U^\varepsilon(x)$ considérés a priori comme *indépendants*, développements formels suivant les puissances de ε arrêtés à l'ordre un, et non pas deux comme dans la méthode usuelle sur le système primal, puisque l'équation (5) devient du second ordre en U en utilisant l'équation (6); ainsi :

$$\left. \begin{aligned} (10) \quad U^\varepsilon(x) &= U_0(x, y) + \varepsilon U_1(x, y) + \dots \\ (11) \quad \sigma^\varepsilon(x) &= \sigma_0(x, y) + \varepsilon \sigma_1(x, y) + \dots \\ (12) \quad \lambda^\varepsilon &= \lambda_0 + \dots \end{aligned} \right\} \text{ avec } y = \frac{x}{\varepsilon}$$

les fonctions $U_0, U_1, \dots; \sigma_0, \sigma_1, \dots$ étant Y -périodiques (périodicité en Y).

On désigne par $D_x(U)$ (resp. $D_y(U)$) la quantité

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right] \text{ pour } x \in \Omega \quad \left(\text{resp. } \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right] \text{ pour } y \in Y \right).$$

Les notations div_x et div_y sont alors également définies.

On porte alors les développements (10), (11), (12) dans le système mixte (5), (6), (7), (8) en notant classiquement

qu'une dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ se transforme en $\varepsilon^{-1} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}$

(dérivée de $f(x, y)$ par rapport à x pour $y = \frac{x}{\varepsilon}$). Ainsi D_x

se transforme en $\varepsilon^{-1} D_y + D_x$ et div_x se transforme en $\varepsilon^{-1} div_y + div_x$.

On obtient alors aux ordres -1 et 0 suivant les puissances de ε , les systèmes mixtes suivants :

A l'ordre -1

$$\begin{aligned} (13) \quad \overline{div_y \sigma_0(x, y)} &= 0 \\ (14) \quad A(y) (D_y(U_0)) &= 0 \\ \sigma_0, U_0 & Y\text{-périodiques.} \end{aligned}$$

Remarque. — Dans le système d'équations précédent, x peut être considéré comme un paramètre; on obtient alors un système d'équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites de périodicité posé uniquement sur la cellule de base Y . C'est ainsi que le problème de départ, posé initialement dans Ω , se ramène à des problèmes statiques sur Y en ce qui concerne la détermination de la loi de comportement homogénéisée qui servira à résoudre le problème homogénéisé posé lui sur Ω :

A l'ordre 0

$$(15) \quad \overline{div_y \sigma_1(x, y)} = - \overline{div_x \sigma_0(x, y)} - \rho(y) \lambda_0 U_0(x, y)$$

$$(16) \quad A(y) (D_y(U_1(x, y))) = - A(y) (D_x(U_0)) + \sigma_0(x, y) \\ \sigma_1, U_1 \text{ Y-périodiques}$$

et les conditions aux limites (7) et (8) qui n'interviennent pas immédiatement, compte tenu de la remarque précédente (x paramètre, problème posé sur Y avec conditions aux limites de périodicité).

On remarque tout d'abord que l'équation (14) entraîne du fait du caractère positif non dégénéré de A que :

$$(17) \quad D_y(U_0(x, y)) = 0.$$

Donc $U_0(x, y)$ est de la forme $a(x) + b(x) \times y$. Du fait du caractère Y -périodique de U_0 , $b(x) = 0$, si bien que $U_0(x, y)$ est une fonction qui ne dépend que de x et que nous noterons $U_0(x)$. Du point de vue mécanique, $D_y(U_0(x, y)) = 0$ signifie que $U_0(x, y)$ représente, à x fixé, un petit mouvement de corps rigide qui est une translation du fait que $U_0(x, y)$ est Y -périodique, donc $U_0(x, y)$ ne dépend que de x : $U_0(x)$.

En prenant ensuite div_y de l'équation (16) et en se servant de l'équation (13), on obtient :

$$(18) \quad div_y [A(y) (D_y(U_1))] = - div_y A(y) \cdot D_x(U_0)$$

avec

$div_y A(y) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^6; \mathbf{R}^6)$ ([1], communications personnelles).

En composantes cartésiennes, l'équation (18) s'écrit :

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkh} \varepsilon_{kh}^r(U_1)) = - \frac{\partial a_{ijkh}}{\partial y_j} \varepsilon_{kh}(U_0).$$

La résolution de (18) conduit aux six correcteurs classiques de base χ_i [5] correspondant aux six vecteurs de base \mathcal{D}_i de \mathbf{R}^6 : En posant $D_x(U_0) = \mathcal{D}_i^i \Delta_x(U_0)$ (les \mathcal{D}_i sont les composantes de D_x dans la base \mathcal{D}_i [1]), à chaque \mathcal{D}_i est associé une fonction χ_i appelée correcteur [3, 4, 5], fonction Y -périodique solution de l'équation obtenue à partir de (18) pour chaque vecteur de base.

En coordonnées cartésiennes, en désignant par $\chi^{rs}(y)$ le vecteur défini à une constante additive près par l'équation issue de (19) :

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijkh} \varepsilon_{kh}(\chi^{rs})) &= + \frac{\partial}{\partial y_j} a_{ijrs}(y) \\ \chi^{rs} & Y\text{-périodique} \end{aligned} \right.$$

on retrouve les correcteurs classiques [5, 6]. D'où la solution générale de (18) :

$$(21) \quad U_1(x, y) = - \chi_i(y)^i \Delta_x(U_0) + \hat{U}_1(x)$$

les χ correspondent aux correcteurs classiques dans l'équation définissant χ et $\hat{U}_1(x)$ est une fonction arbitraire pouvant être négligée si les correcteurs sont astreints à satisfaire une condition de moyenne nulle [20].

L'équation (16) détermine alors $\sigma_0(x, y)$, selon :

$$(22) \quad \sigma_0(x, y) = A(y) ((\mathcal{D}_i - D_y(\chi_i))^i \Delta_x(U_0))$$

ou encore :

$$(23) \quad \sigma_0(x, y) = (A(y) - A(y) (D_y(\chi_i))^i \mathcal{D}^{-1}) (D_x(U_0)).$$

En coordonnées cartésiennes et en utilisant la notation classique χ^{kh} pour les correcteurs, on obtient :

$$(24) \quad \sigma_{0ij}(x, y) = [a_{ijkh}(y) - a_{ijrs} \varepsilon_{rs}(\chi^{kh}(y))] \varepsilon_{kh}^x.$$

On remarque ensuite que $\int_Y (15) = 0$ car :

$$\int_Y \overline{div_y \sigma_1(x, y)} = \int_{\partial Y} \sigma_1(x, y) n_Y \cdot \partial Y$$

désignant le bord de la cellule de base et n_Y la normale unitaire extérieure à Y ; et de plus $\sigma_1(x, y)$ est Y -périodique (valeurs égales deux à deux sur les faces opposées de la cellule Y). Par conséquent le second membre de l'équation (15) vérifie la condition d'intégrabilité suivante :

$$(25) \quad \int_Y \operatorname{div}_x \sigma_0(x, y) + \int_Y \rho(y) \lambda_0 U_0(x) = 0.$$

Cette condition correspond dans le cas général à « l'alternative de Fredholm » déjà utilisée dans les références [3, 4, 5]. Il est à noter que c'est cette condition qui donnera l'équation d'équilibre dynamique du milieu homogène « équivalent ».

En portant l'expression de $\sigma_0(x, y)$ (équation (23)) dans (25), et en désignant par $\tilde{\sigma}_0(x)$ (resp. $\tilde{\rho}(y)$) la valeur moyenne de $\sigma_0(x, y)$ sur Y (resp. la valeur moyenne de $\rho(y)$ sur Y) selon :

$$(26) \quad \tilde{\sigma}_1(x) = \frac{1}{|Y|} \int_Y (A(y) - A(y)) (D_y(\chi_i)) {}^i\mathcal{D}^{-1} (D_x(U_0)) dy$$

$$(27) \quad \tilde{\rho} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho(y) dy$$

on obtient l'équation d'équilibre dynamique suivante :

$$(28) \quad \operatorname{div} \tilde{\sigma}_0(x) + \tilde{\rho} \lambda_0 U_0(x) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

On réécrit (26) sous la forme :

$$(29) \quad \tilde{\sigma}_0(x) = Q D_x(U_0(x)) \quad \text{dans } \Omega$$

avec :

$$(30) \quad Q = \frac{1}{|Y|} \int_Y [A(y) - A(y) (D_y(\chi_i)) {}^i\mathcal{D}^{-1}] dy.$$

En composantes cartésiennes, on a en désignant par $q_{ij kh}$ les composantes de Q (tenseur **symétrique**) :

$$(31) \quad q_{ij kh} = \frac{1}{|Y|} \int_Y [a_{ij kh}(y) - a_{ijrs} \varepsilon_{rs} (\chi^{kh}(y))] dy$$

avec les conditions aux limites issues naturellement de (7) et de (8) :

$$(32) \quad \tilde{\sigma}_0(x) n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_F$$

$$(33) \quad U_0(x) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_U.$$

Le problème spectral homogénéisé s'écrit alors :

Trouver $\lambda_0 \in \mathbf{R}^+$ et $(U_0(x), \tilde{\sigma}_0(x))$ solutions de (28), (29), (32), (33).

On peut obtenir à nouveau un système en $U_0(x)$ seul et résoudre alors classiquement le problème par la méthode des éléments finis à partir du principe variationnel classique « en déplacement » du problème homogénéisé [1] :

Trouver

$$\lambda_0 \in \mathbf{R}^+ \text{ et } (U_0(x) \in V = \{v(x) \mid v(x) \in [H^1(\Omega)]^3, v|_{\partial\Omega_U} = 0\})$$

tel que le quotient de Rayleigh :

$$(34) \quad [\omega^2] = \frac{\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{Tr} [\tilde{\sigma}_0(U_0) D(U_0)]}{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |U_0|^2}$$

soit stationnaire sur V (le symbole Tr désigne la trace d'un opérateur [1]).

Remarques

1) Ces résultats correspondent à ceux de [5, 6, 10] en notant que pour $\varepsilon = 0$ ce n'est pas $\sigma_0(x, y)$ qui intervient et qui est donné par (23), mais sa valeur moyenne sur Y .

Ainsi la récupération des contraintes locales au niveau de la cellule de base peut s'effectuer en utilisant la relation (23). Ce point est important pour l'homogénéisation de structures multiperforées si l'on désire récupérer les contraintes au voisinage des trous (problème de concentrations de contraintes en dynamique) [5, 10, 11].

2) On retrouve le résultat que l'on obtiendrait par la méthode des moyennes à savoir que la loi de comportement homogénéisée relie les valeurs moyennes des contraintes aux valeurs moyennes des déformations (en

effet, dans l'équation (29), $D_x(U_0) = D_x(U_0)$ puisque U_0 ne dépend que de x).

3) La méthode proposée, qui diminue l'ordre du système en le ramenant à un système canonique, a eu pour effet de découpler l'équation d'équilibre dynamique de la loi de comportement à homogénéiser.

4) Le calcul des coefficients de Q intervenant dans la loi de comportement homogénéisée (loi « anisotrope ») :

$$\tilde{\sigma}_0(x) = Q D_x(U_0(x))$$

s'effectue en deux étapes :

a) Résolution de l'équation (18) pour six vecteurs de base en vue d'obtenir les six correcteurs de base. Cette résolution s'effectue par la méthode des éléments finis en utilisant un code standard de calcul par éléments finis. En effet, après mise sous forme variationnelle du problème statique défini par (18) sur Y , l'opérateur est le même que celui intervenant dans le problème de départ ou dans le numérateur de l'équation (34) avec des intégrales portant sur Y au lieu de Ω .

b) Détermination des composantes de Q dans une base cartésienne (x_1, x_2, x_3) par exemple en utilisant une relation dérivée de (30) ou de (31) qui fait intervenir à nouveau l'opérateur d'énergie potentielle du corps restreinte à Y [5, 6].

Les codes standards d'éléments finis contiennent les outils nécessaires à la résolution de a) et de b).

5) Nous n'avons pas examiné, dans le cadre de ce travail, les problèmes liés à l'étude de la convergence (convergence faible) du processus. Pour des systèmes primaux, de telles questions ont été examinées dans les références [12, 19]. Pour des systèmes mixtes, et pour des problèmes voisins, nous renvoyons à [25].

IV. — APPLICATION A UN PROBLÈME D'ORDRE DEUX : CAS PARTICULIER DE LA BARRE VIBRANT EN TRACTION-COMPRESSION

Considérons une barre hétérogène à structure périodique vibrant en traction-compression et encastrée à ses deux extrémités.

Le problème spectral dérivé des équations (5) à (8) s'écrit :

Trouver $\lambda^e \in \mathbf{R}^+$ et (U^e, σ^e) tels que :

$$(35) \quad \frac{d\sigma^e}{dx} + \rho^e \lambda^e U^e = 0 \quad \text{dans } \Omega =]0, L[$$

$$(36) \quad \sigma^e = E^e U^e \quad \text{dans }]0, L[$$

(E^ε désigne le module d'Young du matériau).

$$(37) \quad U^\varepsilon = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = L.$$

Le caractère unidimensionnel du tenseur des contraintes simplifie encore davantage la méthode mixte proposée (la méthode primale directe est plus complexe).

Les développements :

$$\begin{cases} \sigma^\varepsilon(x) = \sigma_0(x, y) + \varepsilon \sigma_1(x, y) \\ U^\varepsilon(x) = U_0(x, y) + \varepsilon U_1(x, y) \end{cases} \quad \text{pour } y = \frac{x}{\varepsilon}$$

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \dots$$

qui correspondent à (10), (11), (12) conduisent alors aux systèmes mixtes suivants aux ordres -1 et 0 en ε :

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{d\sigma_0}{dy}(x, y) = 0 \\ E(y) \frac{du_0(x, y)}{dy} = 0 \end{cases} \quad \sigma_0, U_0 \text{ Y-périodiques}$$

et

$$(40) \quad \begin{cases} \frac{d\sigma_1(x, y)}{dy} = -\frac{d\sigma_0(x, y)}{dx} - \rho(y)\lambda_0 U_0(x, y) \\ E(y) \frac{du_1(x, y)}{dy} = -E(y) \frac{dU_0}{dx} + \sigma_0(x, y) \end{cases}$$

avec σ_1, U_1 Y-périodiques.

Les équations (38) et (39) montrent que σ_0 et U_0 ne dépendent que de x .

La condition d'intégrabilité de (40) : $\int_Y \frac{d\sigma_1(x, y)}{dy} dy = 0$

entraîne :

$$(42) \quad \begin{cases} \frac{d\sigma_0}{dx} + \tilde{\rho} \lambda_0 U_0(x) = 0 \\ \tilde{\rho} \text{ désignant la moyenne de } \rho(y) \text{ sur } Y. \end{cases}$$

De même, après division par $E(y)$ (quantité strictement positive), on a une condition d'intégrabilité de (41) qui s'écrit (puisque U_1 est Y-périodique) :

$$\int_Y \left[-\frac{du_0}{dx} + \frac{1}{E(y)} \sigma_0 \right] dy = 0$$

d'où :

$$(43) \quad \sigma_0(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{E}\right)} \frac{du_0}{dx}$$

qui représente la loi de comportement homogénéisée et qui fait intervenir l'inverse de la moyenne de l'inverse du module d'Young sur une cellule élémentaire. Ce résultat, vrai uniquement en unidimensionnel, peut se trouver physiquement directement : il s'agit de la raideur d'un système de ressorts en série.

Correcteurs de formes propres

En utilisant le même procédé que celui indiqué dans III,1, il suffit de dériver (41) pour obtenir le correcteur de forme propre conduisant à :

$$U_1(x, y) = -\chi(y) \frac{du_0}{dx}$$

$\chi(y)$ étant solution de (18) :

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{d}{dy} E(y) \frac{d\chi(y)}{dy} = \frac{dE(y)}{dy} \\ \chi(y) \text{ Y-périodique.} \end{cases}$$

Le système (44) se résout aisément par la méthode des éléments finis, après une intégration par parties de la quantité $\frac{dE(y)}{dy} \delta\chi$ qui correspond à la formulation variationnelle du problème statique défini par (44) selon :

$$(45) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \chi(y) \text{ Y-périodique tel que} \\ \int_Y E(y) \frac{d\chi}{dy} \frac{d\delta\chi}{dy} dy = \int_Y \frac{d\delta\chi}{dy} E(y) dy \\ \forall \delta\chi \text{ Y-périodique.} \end{cases}$$

que l'on résout de façon classique par la méthode des éléments finis (au second membre de (45), $E(y)$ joue le rôle d'une force de volume donnée si l'on utilise un code de calcul de structures).

Application numérique [19]

On considère une barre formée à partir de la cellule de base suivante (fig. 4).

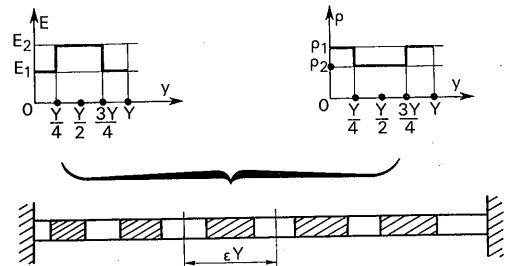


Fig. 4. — Barre hétérogène. Cellules de base.

Deux problèmes ont été traités (longueur L de la barre : 1 m) :

- 1) $\begin{cases} E_1 = 0,1 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2 \\ E_2 = 0,2 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2 \\ \rho_1 = 9\,000 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_2 = 7\,850 \text{ kg/m}^3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{E}\right) = 0,1333 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2 \\ \tilde{\rho} = 8\,475 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right.$
- 2) $\begin{cases} E_1 = 0,2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ E_2 = 0,2 \cdot 10^{12} \text{ N/m}^2 \\ \rho_1 = 9\,000 \text{ kg/m}^3 \\ \rho_2 = 7\,850 \text{ kg/m}^3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{E}\right) = 0,381 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \\ \tilde{\rho} = 8\,475 \text{ kg/m}^3 \end{array} \right.$

Nombre d'éléments finis utilisés pour le problème « homogène » : 50. En ce qui concerne le nombre d'éléments finis utilisés pour le problème « hétérogène », deux cas ont été considérés : $\varepsilon = \frac{1}{10}$ et $\varepsilon = \frac{1}{50}$; dans chacun des cas, un seul élément fini par période a été utilisé.

Résultats sur les fréquences

Le tableau I ci-dessous donne les résultats et montrent la validité des méthodes d'homogénéisation.

TABLEAU I.

Cas 1	Homo-gène	Hétéro-gène $\varepsilon = \frac{1}{10}$		Hétéro-gène $\varepsilon = \frac{1}{50}$		Cas 2	Homo-gène	Hétéro-gène $\varepsilon = \frac{1}{10}$		Hétéro-gène $\varepsilon = \frac{1}{50}$	
		Erreur %	Erreur %	Erreur %	Erreur %			Erreur %	Erreur %		
f_1	198,9	198,7	1,0	198,9	0,0	f_1	106,3	103,6	2,4	103,9	2,2
f_2	397,5	396,0	1,3	397,7	0,5	f_2	212,6	205,6	3,3	207,6	2,3
f_3	595,8	590,7	6,9	596,4	1,0	f_3	318,7	304,2	4,5	311,3	2,3
f_4	793,5	781,1	15,6	795,0	1,9	f_4	424,4	397,5	6,3	414,7	2,3
f_5	990,5	965,0	25,7	993,2	2,7	f_5	529,7	483,3	8,8	517,8	2,3

Résultats sur les formes propres (avec calcul du correcteur par résolution de l'équation (45) (fig. 5).

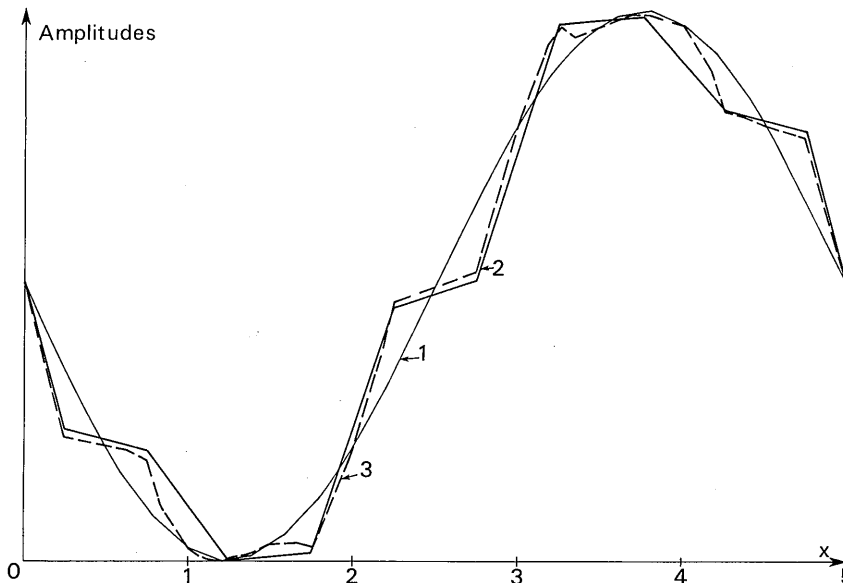


Fig. 5. — Quatrième forme propre de vibration (courbe n° 1).

$$\begin{cases} E^1 = 0,2 \cdot 10^{11} \\ E^2 = 0,2 \cdot 10^{12} \end{cases} \text{ (cas 2)}$$

1. La courbe moyenne est la courbe homogène.
2. Courbe hétérogène ($\varepsilon = \frac{1}{10}$).
3. Courbe homogène corrigée.

Calcul homogénéisé : $\bar{\lambda}_4 = 4\,244$ Hz.
 Calcul hétérogène : $\lambda_4^{10} = 3\,975$ Hz ($\varepsilon = 1/10$).
 Calcul hétérogène : $\lambda_4^{50} = 4\,147$ Hz ($\varepsilon = 1/50$).

Le calcul de $x(y)$ à l'aide de (45) a été effectué en utilisant une interpolation linéaire de χ avec quatre éléments finis dans une période.

V. — APPLICATION A UN PROBLÈME D'ORDRE QUATRE :

VIBRATIONS HARMONIQUES D'UN ANNEAU ISOTROPE, HÉTÉROGÈNE A STRUCTURE PÉRIODIQUE (EN THÉORIE CLASSIQUE DES POUTRES) DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES MIXTES

On applique les considérations du paragraphe III au cas d'un opérateur complexe d'ordre quatre avec la simplification due au caractère unidimensionnel de la structure. S (resp. I) désigne l'aire de la section de l'anneau (resp. l'inertie de section), R le rayon, E le module d'Young; $u^\varepsilon(x)$ et $v^\varepsilon(x)$ désignent les composantes inconférentielle et radiale du déplacement ($x \in]0, L[$, $L = 2\pi R$).

Le problème spectral s'écrit au moyen du quotient de Rayleigh :

Trouver $\lambda^\varepsilon \in \mathbf{R}^+$, $(u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in V$

$$V = \{(u, v) \in H^1(]0, L[) \times H^2(]0, L[) \mid u(0) = u(L), v(0) = v(L),$$

$$\left. \frac{dv}{dx}(0) = \frac{dv}{dx}(L) \right\}, \text{ tels que :}$$

$$(46) \quad [\lambda^\varepsilon] = \frac{\frac{1}{2} \int_0^L E^\varepsilon S \left(\frac{du^\varepsilon}{dx} - \frac{v^\varepsilon}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_0^L E^\varepsilon I \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{dv^\varepsilon}{dx} + \frac{u^\varepsilon}{R} \right) \right)^2}{\frac{1}{2} \int_0^L \rho^\varepsilon (u^{\varepsilon 2} + v^{\varepsilon 2})}$$

soit stationnaires ($H^2(]0, L[)$ désigne l'espace de Sobolev d'ordre 2).

Les équations en déplacements qui en résultent sont :

$$(47) \begin{cases} \frac{d}{dx} \left(E^\varepsilon S \left(\frac{du^\varepsilon}{dx} - \frac{v^\varepsilon}{R} \right) \right) + \\ + \frac{1}{R} \frac{d}{dx} \left(E^\varepsilon I \left(\frac{d^2 v^\varepsilon}{dx^2} + \frac{1}{R} \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \right) + \rho^\varepsilon \lambda^\varepsilon u^\varepsilon = 0 \\ \frac{1}{R} \left(E^\varepsilon S \left(\frac{du^\varepsilon}{dx} - \frac{v^\varepsilon}{R} \right) \right) - \\ - \frac{d^2}{dx^2} \left(E^\varepsilon I \left(\frac{d^2 v^\varepsilon}{dx^2} + \frac{1}{R} \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \right) + \rho^\varepsilon \lambda^\varepsilon v^\varepsilon = 0 \\ (u^\varepsilon, v^\varepsilon) \in V. \end{cases}$$

La complexité de ces équations nous conduit à introduire les variables duales :

$$\begin{cases} (48) \quad N^\varepsilon(x) = E(y) S \left(\frac{du^\varepsilon}{dx} - \frac{v^\varepsilon}{R} \right) \\ (49) \quad M^\varepsilon(x) = E(y) I \left(\frac{d^2 v^\varepsilon}{dx^2} + \frac{1}{R} \frac{du^\varepsilon}{dx} \right) \end{cases} \text{ avec } y = \frac{x}{\varepsilon}$$

N^ε et M^ε désignent respectivement l'effort normal et le moment fléchissant. Les équations (47) donnent alors les équations d'équilibre classiques [2], correspondant à un principe du type Hellinger-Reissner issu de (46) :

$$(50) \quad \frac{d}{dx} \left(N^\varepsilon + \frac{M^\varepsilon}{R} \right) + \rho^\varepsilon \lambda^\varepsilon u^\varepsilon = 0$$

$$(51) \quad -\frac{N^\varepsilon}{R} + \frac{d^2 M^\varepsilon}{dx^2} + \rho^\varepsilon \lambda^\varepsilon v^\varepsilon = 0.$$

En effectuant les développements formels (ordre 1 en ε pour N^ε et u^ε , ordre 2 pour M^ε et v^ε dans le système mixte (48), (49), (50), (51) selon :

$$(52) \begin{cases} N^\varepsilon(x) = N_0(x, y) + \varepsilon N_1(x, y) + \dots \\ M^\varepsilon(x) = M_0(x, y) + \varepsilon M_1(x, y) + \varepsilon^2 M_2(x, y) + \dots \\ u^\varepsilon(x) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \dots \\ v^\varepsilon(x) = v_0(x, y) + \varepsilon v_1(x, y) + \varepsilon^2 v_2(x, y) \end{cases}$$

avec $\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \dots$, $y = \frac{x}{\varepsilon}$, et $(u_0, u_1); (v_0, v_1, v_2); (N_0, N_1)$

(M_0, M_1, M_2) Y -périodiques, on obtient trois systèmes mixtes aux ordres -2 , -1 et 0 . Les équations obtenues aux ordres -2 et -1 entraînent la dépendance en x seul des fonctions u_0, N_0 et v_0, v_1, M_0, M_1 .

Le système à l'ordre 0 s'écrit :

$$(53) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \left(N_1 + \frac{M_1}{R} \right) = -\rho(y) \lambda_0 u_0 - \frac{d}{dx} \left(N_0 + \frac{M_0}{R} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} M_2 = \rho(y) \lambda_0 v_0 + \frac{N_0}{R} - \frac{d^2}{dx^2} M_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial y} u_1 = \frac{N_0(x)}{SE(y)} + \frac{v_0}{R} - \frac{du_0}{dx} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} v_2 = \frac{M_0}{IE(y)} - \frac{N_0}{SRE(y)} - \frac{v_0}{R} - \frac{d^2 v_0}{dx^2}. \end{cases}$$

Les conditions d'intégrabilité de (53) conduisent alors aisément au problème homogénéisé avec un module

d'Young égal à $\frac{1}{\left(\frac{1}{E}\right)}$ et une masse linéique égale à $\tilde{\rho}$ (moyen-

nes effectuées sur Y). On obtient de plus les correcteurs définis par :

$$(54) \begin{cases} \frac{d}{dy} E(y) \frac{d\chi_1}{dy} = \frac{dE}{dy} \\ \chi_1(y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

et

$$(55) \begin{cases} \frac{d^2}{dy^2} E(y) \frac{d\chi^2}{dy^2} = \frac{d^2 E}{dy^2} \\ \chi_2(y) \text{ } Y\text{-périodique} \end{cases}$$

et conduisant à :

$$(56) \begin{cases} u_1(x, y) = \chi_1(y) \left[\frac{v_0}{R} - \frac{du_0}{dx} \right] \\ v_2(x, y) = -\chi_2(y) \left[\frac{1}{R} \frac{du_0}{dx} + \frac{d^2 v_0}{dx^2} \right]. \end{cases}$$

Applications numériques [19]

1) Vibration d'une arche demi-circulaire encastrée

Les caractéristiques géométriques sont les suivantes :

$$\begin{cases} I = 3,9417 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4 \\ S = 0,003 \text{ m}^2 \\ R = 1 \text{ m}. \end{cases}$$

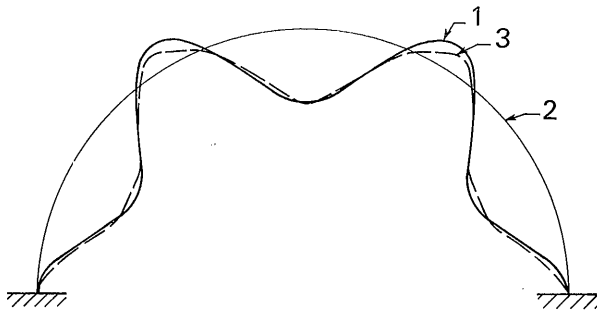
Les caractéristiques mécaniques sont les mêmes que pour la barre en traction-compression.

Résultats sur les fréquences (tabl. II)

TABLEAU II.

Cas 1	Homogène	Hétérogène	Erreur %	Hétérogène	Erreur %	Cas 2	Homogène	Hétérogène	Erreur %	Hétérogène	Erreur %
		$\varepsilon = \frac{1}{10}$		$\varepsilon = \frac{1}{50}$				$\varepsilon = \frac{1}{10}$		$\varepsilon = \frac{1}{50}$	
f_1	100,1	99,2	0,9	100,0	0,1	f_1	53,5	51,2	4,3	52,2	2,4
f_2	215,8	213,3	1,2	215,6	0,1	f_2	115,4	103,6	5,3	112,5	2,5
f_3	402,9	397,1	1,4	402,6	0,1	f_3	215,5	203,2	5,7	210,0	2,3
f_4	533,1	530,1	0,6	532,9	0,05	f_4	285,1	274,5	4,0	278,2	2,4
f_5	707,5	701,5	0,9	707,2	0,05	f_5	378,4	361,8	4,4	369,1	2,5

Résultats sur les formes propres (fig. 6), courbe 2



2) Vibrations d'un anneau hétérogène

Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont les mêmes que celles de l'arche demi-circulaire.

Résultats sur les fréquences (modes symétriques du problème homogénéisés) tableau III.

Fig. 6. — Formes propres, mode n° 5 (courbe n° 2).

1. Calcul homogène. 3. Calcul hétérogène.
2. Configuration initiale.

TABLEAU III.

Cas 1	Homo-gène	Hétéro-gène $\varepsilon = \frac{1}{10}$	Erreur %	Hétéro-gène $\varepsilon = \frac{1}{50}$	Erreur %	Cas 2	Homo-gène	Hétéro-gène $\varepsilon = \frac{1}{10}$	Erreur %	Hétéro-gène $\varepsilon = \frac{1}{50}$	Erreur %
f_1	61,5	61,5	0,1	61,5	0,0	f_1	32,8	32,1	2,1	32,1	2,0
f_2	173,8	173,7	0,4	173,8	0,0	f_2	92,9	90,7	2,4	90,8	2,3
f_3	333,3	333,0	0,9	333,2	0,4	f_3	178,2	173,6	2,6	174,0	2,3
f_4	538,9	538,1	1,5	538,7	0,4	f_4	288,2	280,1	2,8	281,3	2,3
f_5	633,1	633,0	0,2	633,1	0,0	f_5	338,6	330,4	2,3	330,6	2,3

Résultats sur les formes propres (fig. 7), courbe 3

On peut constater la très bonne validité des résultats obtenus.

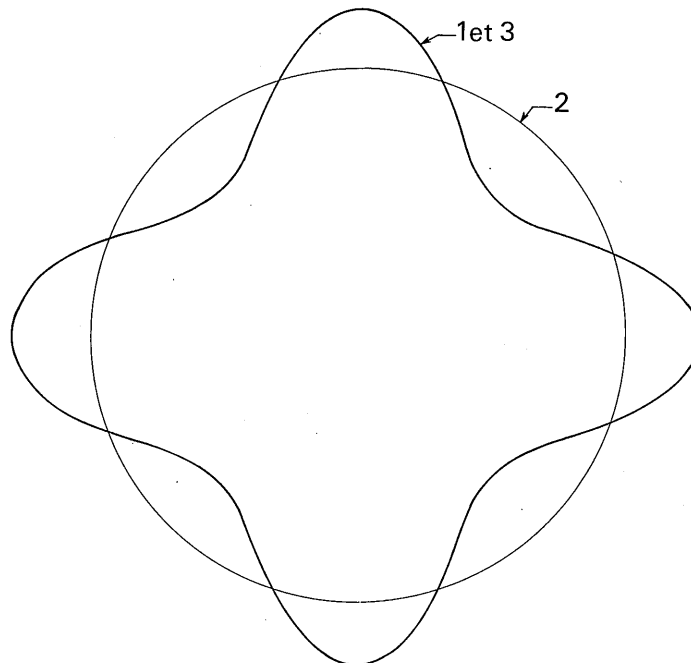


Fig. 7. — Formes propres, mode n° 4 (courbe n° 3).

1. Calcul homogène. 2. Configuration initiale. 3. Calcul hétérogène.

VI. — CONCLUSION

La méthode proposée permet, en ramenant le système d'équations aux dérivées partielles à un système canonique, d'effectuer simplement les développements asymptotiques qui seraient inextricables sur le système primal (cf. équations de l'anneau élastique). Les résultats numériques obtenus montrent l'intérêt en vibrations des méthodes d'homogénéisation en vue d'applications concrètes nouvelles.

Des extensions sont actuellement en cours pour l'étude des correcteurs de fréquence. Un autre thème d'étude est constitué par les vibrations de structure de révolution raidies (éventuellement partiellement remplies de liquide sur la base des travaux de [22, 23, 24], références incluses) en ramenant notamment le problème d'ordre 4 à un problème d'ordre 2 en utilisant des techniques de régularisation.

Manuscrit remis le 15 février 1979.

RÉFÉRENCES

- [1] VALID R. — *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures*. — Édition Eyrolles (1977); édition anglaise à paraître chez North-Holland (1979).
- [2] GERMAIN P. — *Cours de mécanique des milieux continus*. — Tome 1, Éd. Masson (1973) et Cours de l'École Polytechnique (1977).
- [3] LIONS J. L. — *Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal*. — Les Presses de l'Université de Montréal (1976).
- [4] BENSOUSSAN A., LIONS J. L. and PAPANICOLAOU G. — *Asymptotic methods in periodic structures*. — North-Holland Éd. (1978).
- [5] DUVAUT G. — *Analyse fonctionnelle - Mécanique des milieux continus*. — *Homogénéisation*; dans Theoretical and Applied Mechanics, North-Holland (W. Koiter, Éd.) (1976).
- [6] DUVAUT G. — Communication au Congrès GAMNI, Paris (1978) et Cours de DEA de l'Université Pierre et Marie Curie (1977).
- [7] TARTAR L. — Cours Peccot - Collège de France (1977).
- [8] SANCHEZ-PALENCIA E. — *Comportement local et macroscopique d'un type de milieu physique hétérogène*. — Int. J. Eng. Sci. vol. 12 (1974).
- [9] AURIAULT J. L. et SANCHEZ-PALENCIA E. — *Étude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable*. — Journal de Mécanique, vol. 16, n° 4 (1977).
- [10] LENE F. — *Comportement macroscopique de matériaux élastiques comportant des inclusions rigides ou des trous répartis périodiquement*. — C. R. Ac. Sc., t. 286, série A (1978).
- [11] SUQUET P. — *Conférence au séminaire sur les méthodes d'homogénéisation en mécanique*, organisé par G. Duvaut. — Université P. et M. Curie (1978).
- [12] VANNI NATHAN M. — C. R. Ac. Sc., t. 287, série A (1978).
- [13] BABUSKA I. — *Homogenization and its applications*. — Acad. Press-Synopade (1975).
- [14] OHAYON R. — *Homogénéisation par développements asymptotiques mixtes. Vibrations d'un anneau hétérogène à structure périodique*. — C. R. Ac. Sc., série A (séance du 15 janvier 1979).
- [15] OHAYON R. — Communication au Congrès GAMNI, Paris (1978).
- [16] VALID R. — *An intrinsic formulation for the nonlinear theory of shells and some approximations*. — J. Comp. and Structures, vol. 10 (1978).
- [17] CIARLET P. and DESTUYNDER P. — *A justification of the two-dimensional linear plate model*. — Rapport n° 23, Centre de Math. Appl. de l'École Polytechnique (1978) et P. Destuynder (thèse à paraître).
- [18] BOUJOT J. — Cours de l'Université d'Orléans sur la Mécanique des Vibrations (1978).
- [19] FRANCFORT G. et POSTEL-VINAY C. — *Homogénéisation statique et dynamique*. — (Rapport de stage). Document ONERA non publié (1978).
- [20] BOURGAT A. — Communication au Congrès IRIA, Versailles (1977).
- [21] ENGRAND D. — *Application des méthodes de l'homogénéisation à un problème de thermoélasticité*. — Communication au Congrès GAMNI (1978).
- [22] VALID R., OHAYON R. et BERGER H. — *Le calcul des réservoirs élastiques partiellement remplis de liquide pour la prévision de l'effet pogo*. — 23^e Congrès I.A.F. Vienne, Autriche (1972).
- [23] MORAND H. and OHAYON R. — *Substructure variational analysis for the vibrations of fluid-structure coupled systems*. — Int. J. for Num. Meth. Engng (à paraître, 1979).
- [24] OHAYON R. — *Étude des oscillations de systèmes couplés fluide-structure* (à paraître).